

單元九 機率的觀念

主題一 認識機率

一、機率是什麼？

想必大家一定都看過氣象預報，也一定都聽過“降雨機率”

下表為某一週氣象預報：

日期	9/15	9/16	9/17	9/18	9/19	9/20	9/21
降雨機率	10%	50%	30%	50%	50%	60%	80%

想一想：

若不考慮氣象局誤判，則 9/15~9/21 這 7 天，哪一天比較容易下雨？哪一天比較不容易下雨呢？為什麼？

9/21 降雨機率為 80%，表示下雨的機會很大，但又不一定會下雨

9/15 降雨機率為 10%，表示下雨的機會很小，但有時卻又會下雨

降雨機率越高，下雨的可能性就越高

所以機率其實就代表著「事情發生的可能性」

機率越高，事情發生的可能性就越高

主題二 機率的計算

二、機率怎麼算？

想一想：

- (1) 投擲一枚公正硬幣一次，會出現哪幾種情形？
 這些情形各自發生的機率是多少？會不會相等呢？
 它的機率又是怎麼算出來的呢？
 試著把你的想法或作法寫在下面。
- (2) 投擲一粒公正骰子一次，會出現哪些種情形？
 這些情形各自發生的機率是多少？會不會相等呢？
 它的機率又是怎麼算出來的呢？
 試著把你的想法或作法寫在下面。

動手做 1：

你知道投擲一枚公正硬幣一次，會出現哪幾種情形嗎？
 這些情形各自發生的機率又是多少呢？
 讓我們動手做一做，並將結果紀錄在下表：

次數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
結果										
次數	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
結果										

動手做 2：

投擲一粒公正骰子一次，會出現哪些種情形？

這些情形各自發生的機率是多少？

讓我們動手做一做，並將結果紀錄在下表：

次數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
結果										
次數	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
結果										

(1) 大家都知道硬幣只有正反兩面，因此投擲一次時就可能出現正面或反面這兩種情形。

一枚硬幣有正反兩個面，投擲一次可能會出現正面或反面其中一種情形，就一枚材質均勻、雙面平整的公正硬幣來說，投擲一次出現正面或反面的機率會是一樣的。因此我們說出現正面的機率是 $\frac{1}{2}$ ，而出現反面的機率也是 $\frac{1}{2}$ 。

(2) 一粒骰子總共有六個面，投擲一次時可能會出現點數 1、2、3、4、5、6 的其中一種情形。因為我們投擲的是一枚公正的骰子，所以每一個面出現（朝上）的機會都是一樣的，因此六種情形裡的每一種情形出現的機率都相等。

由於點數 1 出現的情形都是六種可能情形裡面的一種，因此我們說出現點數 1 的機率是 $\frac{1}{6}$ ，同樣的，出現點數 2 的機率也是 $\frac{1}{6}$ 。以此類推，點數 3、4、5 出線的機率也都是 $\frac{1}{6}$ 。

延伸思考：

動手做 1 和 2 得到的結果跟你原本想是否相同呢？

實際做出來的機率，跟上述的機率是否相同呢？

一枚硬幣出現正面的機率是 $\frac{1}{2}$ ，而出現反面的機率也是 $\frac{1}{2}$ ，但有沒有可能連續丟 26 次的結果全部都是正面呢？

同樣的，一粒骰子每一個點數出現的機率皆為 $\frac{1}{6}$ ，但有沒有可能 26 組數據中點數只出現 1、2、3 呢？

機率所代表的是某一情形發生的可能性，有可能發生但是不一定會發生，機率可以說是一種理想值。

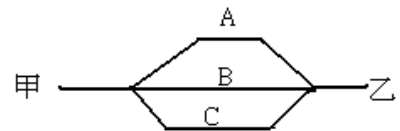
所以我們可以知道理論上的機率與實際上做實驗所得到的機率並不一定相同。

結論：若一件事可能會發生 n 種情形產生不同的結果，而且每種情形發生的機率會相等，那麼每種結果發生的機率為 $\frac{1}{n}$ 。

小試身手

1. 投擲一顆公正骰子一次，請問出現點數 4 的機率為何？
2. 小蓁參加抽獎活動，特獎是汽車一台，共有 500 人參與抽獎，若每人中獎機會一樣，則小蓁中特獎的機率是多少？
3. 已知一袋子中有 50 顆大小相同的球，編號 1、2、3、4、……、48、49、50，每一球被取出的機會都相等。若從袋中任意取出一球，則此球編號是 23 的機率是多少？
4. 小智生日買了很多糖果要請全班同學一人一顆，裡面有紅、橙、黃、綠、藍、靛、紫等七種不同顏色的糖果，且每種顏色糖果數量一樣多，每顆糖果被拿到的機會都相等。請問小名拿到紫色糖果的機率是多少？

5. 小新的班上共有 26 個人，運動會時要選出一人代表班上致詞，每個人被選中的機會皆相等。則小新被選中的機率是多少？
6. 一副撲克牌有 52 張，分成黑桃、紅心、方塊、梅花四種花色，每種花色有 13 張，從這副牌中任取一張，假設每張牌被取中的機會都相同，請問出現紅心5的機率是多少？
7. 右圖是小明騎自行車自甲地到乙地的路線（都是單行道），假設小明所走的每條路線的機會都相同，請問小明由甲地到乙地途中經過 A 點的機率是多少？



活動 1：

你知道兩人玩「剪刀 石頭 布」贏的機率是多少呢？平手的機率呢？輸的機率呢？

兩人一組，進行“剪刀 石頭 布”的遊戲，並記錄在下表中。

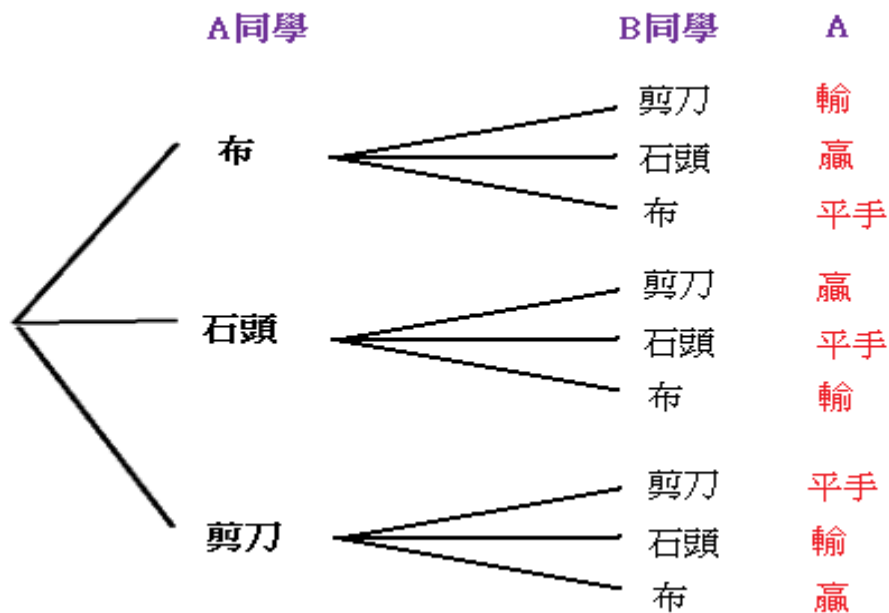
	A 同學	B 同學	輸贏		A 同學	B 同學	輸贏
範例	石頭	布	B 勝	12			
	剪刀	剪刀	平手	13			
1				14			
2				15			
3				16			
4				17			
5				18			
6				19			
7				20			
8				21			
9				22			
10				23			
11				24			

A 同學贏	B 同學贏(A 同學輸)	平手
次	次	次

想一想：

參考上面的紀錄表，共會出現哪些情形呢？

請算出 A 同學贏的機率為何？平手的機率為何？輸的機率為何？



由上圖樹狀圖可知，兩人玩「剪刀 石頭 布」的可能出現的情形共有 9 種，其中 3 種是 A 同學獲勝，3 種是 A 同學輸，3 種是雙方平手。所以 A 同學獲勝的機率是 9 種情形裡的 3 種

$$\text{也就是 } \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

A 同學輸的機率是 9 種情形裡的 3 種

$$\text{也就是 } \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

雙方平手的機率是 9 種情形裡的 3 種

$$\text{也就是 } \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

延伸思考：

剛剛我們由樹狀圖得知”剪刀 石頭 布”的遊戲中各種情形的機率皆為 $\frac{1}{3}$ ，回頭看看剛剛活動 1 得到的 24 組結果，每種情形是否都恰好佔 $\frac{1}{3}$ 呢？

讓我們再做一次活動 1，比較兩次活動結果是否相同。

	A 同學	B 同學	輸贏		A 同學	B 同學	輸贏
範例	石頭	布	B 勝	12			
	剪刀	剪刀	平手	13			
1				14			
2				15			
3				16			
4				17			
5				18			
6				19			
7				20			
8				21			
9				22			
10				23			
11				24			
A 同學贏			B 同學贏(A 同學輸)		平手		

次	次	次
---	---	---

想一想：

比較兩次活動結果，你有什麼發現嗎？為甚麼會這樣呢？

由活動一及延伸思考我們可以很清楚的看到在樹狀圖中 A 獲勝、輸、平手的機率皆相等，而且各為 $\frac{1}{3}$ 。但是從活動紀錄的結果我們可以發現 A 獲勝、輸、平手的機率不一定等於 $\frac{1}{3}$ 。所以我們可以知道由樹狀圖所得到的機率與實際上做實驗所得到的機率並不一定相同。

再一次強調 這很重要喔！

這是因為機率所代表的是某一情形發生的可能性，有可能發生但是不一定會發生，而由樹狀圖得到的機率可以說是一種理想值。

舉例來說，我們知道投擲一枚公正硬幣出現正面或反面的機率為 $\frac{1}{2}$ ，但是當我們投擲一枚硬幣 2 次時，並不一定會剛好是一次正面一次反面；投擲 50 次時也有可能全部都是正面。

活動 2：

連續投擲一枚公正硬幣 2 次，反覆進行此動作並記錄在下表。

	第 1 次	第 2 次	總計
範例	正	反	1 正 1 反
	正	正	2 正
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			
13			
14			

想一想：

這樣又會出現哪些情形呢？出現一次正面一次反面的機率是多少？兩次都是反面的機率是多少？試著畫出它的樹狀圖。



(正正)(正反)(反正)(反反)

由樹狀圖可知，連續投擲一枚公正硬幣 2 次，可能出現的情形有 4 種

所以出現一次正面一次反面的機率是 4 種情形裡面的 2 種

也就是 $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

兩次都是反面的機率是 4 種情形裡面的 1 種

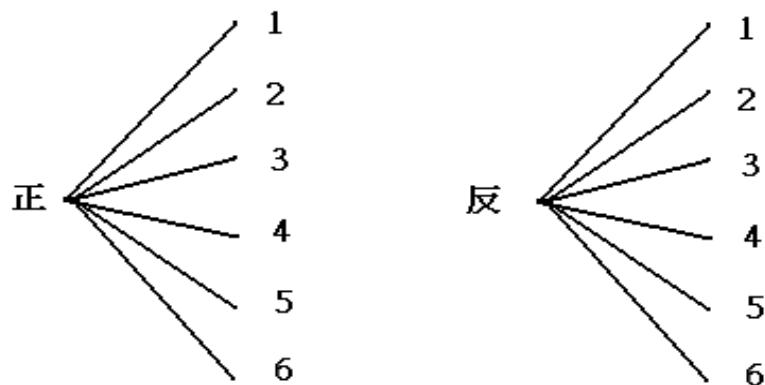
也就是 $\frac{1}{4}$

範例：

投擲一顆公正骰子及一枚公正硬幣，請回答下列問題：

- (1) 請畫出樹狀圖。
- (2) 會出現哪幾種結果呢？
- (3) 出現硬幣為反面、點數為 4 的機率為何？
- (4) 出現點數為 2 的機率為何？
- (5) 出現硬幣為正面的機率為何？

(1) 樹狀圖如下：



- (2) 共有 (正, 1) (正, 2) (正, 3) (正, 4) (正, 5) (正, 6)
(反, 1) (反, 2) (反, 3) (反, 4) (反, 5) (反, 6)，共 12
種結果。
- (3) 硬幣為反面、點數為 4 的結果有一種，因此機率為 $\frac{1}{12}$ 。
- (4) 點數為 2 的結果兩種，分別是 (正, 2) (反, 2)，因此機率為
12 種情形裡面的 2 種 $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ 。

(5) 硬幣為正面的結果有 6 種，分別是 (正, 1) (正, 2) (正, 3) (正, 4) (正, 5) (正, 6)，因此機率為 12 種情形裡面的 6 種，也就是 $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ 。

範例1：試求投擲一顆骰子出現的點數是奇數的機率為何？

解：投擲一顆骰子可能出現 1、2、3、4、5、6 這 6 種點數

其中點數是奇數的結果有 3 種，因此機率為 $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ 。

練習1：試求投擲一顆骰子出現的點數是質數的機率為何？

範例2：有 9 顆球，球上分別標明 1、2、…到 9 號，任選一球，試求被抽到號碼是 2 的倍數的機率為何？

解：任選一球可能出現 1、2、3、4、5、6、7、8、9 這 9 種

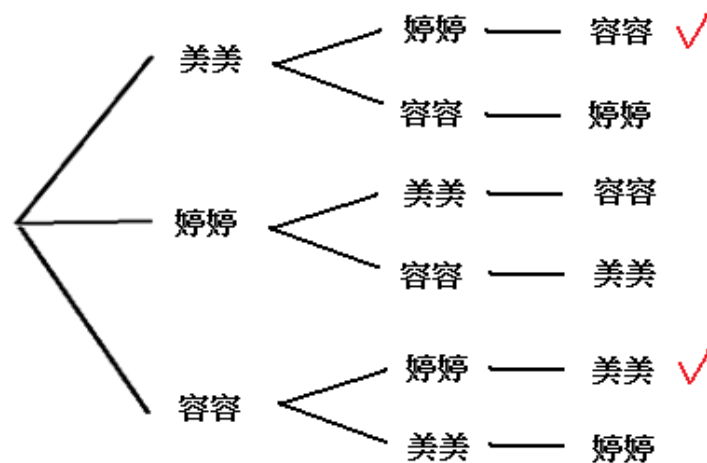
結果，其中 2 的倍數的結果有 4 種，因此機率為 $\frac{4}{9}$ 。

練習2.1：有15顆球，球上分別標明1、2、…到15號，任選一球，試求抽到號碼是3的倍數的機率為何？

練習2.2：有30顆球，球上分別標明1、2、…到30號，任選一球，試求抽到號碼是4的倍數也是6的倍數的機率為何？

範例3：今天美美、婷婷、容容要在音樂課時上台表演，老師抽籤決定她們上台的順序，則婷婷為第二位上台表演的機率為何？

解：



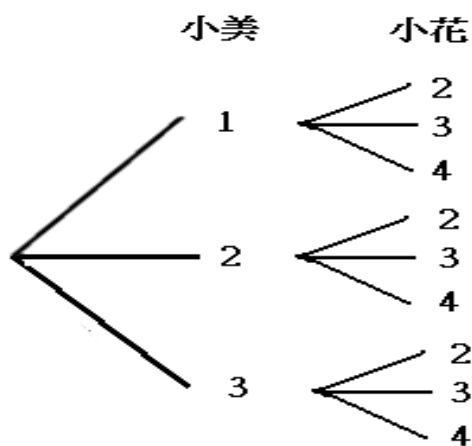
由上圖可知他們三人上台表演順序的結果共有6種，其中

婷婷為第二個上台表演的結果有2種，因此機率為 $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ 。

練習3：幼稚園老師要做家庭訪問，預計要到毛毛、花花、泡泡三位同學家，老師用抽籤決定訪問的順序，請問老師最後一個到花花家訪問的機率為何？請畫出樹狀圖。

範例4：在甲、乙兩個袋子內各放入3個球，並將球分別標上1、2、3與2、3、4。假設兩袋子中每個球被取出的機會均相等。若小美自甲筒取出一球，小花自乙筒取出一球，則小美取出的球其號碼小於小花的機率是多少？

解：



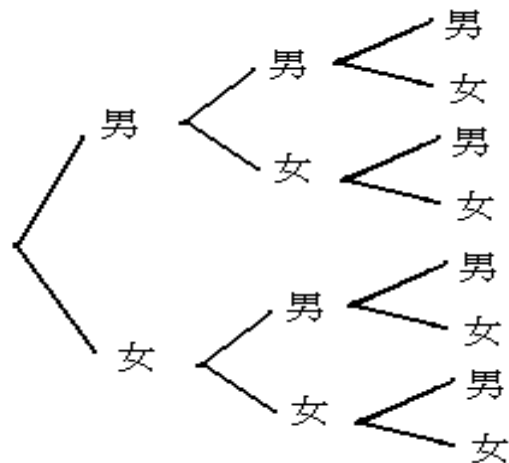
由上圖可知總共有9種結果，其中小美選中的號碼小於

小花的結果有6種，因此機率為 $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ 。

練習4：小珍從5、6…9、10 這6個號碼中選一個，而小名從8、9…11、12 這5個號碼中選一個。假設每個號碼被選中的機會一樣，請問小珍與小名選中相同號碼的機率是多少？

範例5：有一對夫妻生了三個小孩，若每一個孩子出生是男是女的機會相等，請問這三個小孩一男二女的機率是多少？

解：



由上圖可知總共有8種結果，其中一男二女的結果有3種，

因此機率為 $\frac{3}{8}$ 。

練習5：有一對夫妻生了三個小孩，若每一個孩子出生是男是女的機會相等，請問第二胎為女生的機率是多少？請畫出樹狀圖。

結論：若一件事可能會發生 n 種情形，每種情形發生的機率相等，但是若某事件包含 m 種可能的結果，那麼我們說某件事發生的機率為 $\frac{m}{n}$ 。

小試身手

1. 試求投擲一顆骰子出現的點數是 7 的機率為何？

2. 小名和大名兩個人玩剪刀、石頭、布的遊戲，請問小名贏的機率為何？

3. 將一顆骰子連續投擲兩次，請回答下列問題：
- (1) 兩次點數和是 7 的機率為何？
 - (2) 兩次點數和是 10 的機率為何？
4. 小名、大名和媽媽三人玩剪刀、石頭、布的遊戲，假設三人出剪刀、石頭、布的機率相等，試求三人都出布的機率為何？
5. 承第 4 題，小名獨贏的機率為何？
6. 成城百貨公司舉辦抽獎活動，共有 1000 組，開獎時預計抽出 1 個特獎、3 個一獎、6 個二獎、10 個三獎，試求中獎機率為何？
7. 一顆骰子連續投擲兩次，請問兩次都出現相同點數的機率為何？

8. 投擲一枚硬幣三次，請回答下列問題：
- (1) 請畫出樹狀圖。
 - (2) 三次都是正面的機率為何？
 - (3) 一正面二反面的機率為何？
9. 投擲一顆公正骰子及一枚公正硬幣，請回答下列問題：
- (1) 出現硬幣是正面的機率為何？
 - (2) 出現點數是 6 的機率為何？
 - (3) 出現硬幣是正面且點數是 6 的機率為何？
10. 博士百貨周年慶，預計抽出 50 名幸運的客人，每人贈送 1000 元禮券，已知當天有 5000 人到博士百貨購物，請問中獎的機率為何？

11. 一對夫妻生了三個小孩，請回答下列問題：
- (1) 請畫出樹狀圖。
 - (2) 都是女孩機率為何？
 - (3) 兩個女孩一個男孩的機率為何？
12. 某對夫妻有兩個小孩，若每一個孩子出生是男是女的機會相等，請問第一胎為女生且第二胎為男生的機率是多少？
13. 一副撲克牌有 52 張，分成黑桃、紅心、方塊、梅花四種花色，每種花色有 13 張。假設每張牌被取中的機會都相同，從這副牌中任取一張，請回答下列問題：
- (1) 花色是黑桃的機率為何？
 - (2) 點數是 2 的機率為何？
 - (3) 是方塊 6 的機率為何？
14. 大寶跟小寶各投擲一枚公正的硬幣一次，請問大寶與小寶都丟出正面的機率是多少？
15. 將一個公正骰子的六個面塗上顏色，分別是 3 個紅色面、3 個藍色面。現在投擲這個骰子兩次，試求兩次皆為同色面的機率是多少？

主題三 取球問題

想一想：

假如今天有一摸彩箱，裡面有一顆紅球及許多顆白球，每顆球被抽中的機率皆相等，抽到紅球即為中獎。那我們一起來思考看看兩種情況，一種是每一個人抽完獎都必須把球放回去，另一種是每一個人抽完獎都不能把球放回去，請問這兩種抽獎方式，中獎機率是否相同？

假設現在有一人抽中紅球，則：

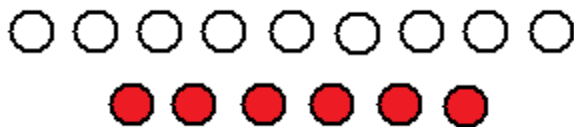
情況一：「紅球不再放回摸彩箱」，此時摸彩箱裡就只剩白球，因此接下來要摸彩的人完全不可能中獎。

情況二：「紅球再放回摸彩箱」，此時摸彩箱中有紅球也有白球，因此接下來摸彩來的人還是有機會取到紅球而中獎。

取球問題是另一種常在機率中討論的問題，假設在一個袋子中放入許多大小、重量、觸感都一樣的球，在這種情況下，我們可以合理的假設每顆球被取出的可能性一樣，因此我們便可以計算每顆球被取出的機率。

範例1：一個袋子中有 15 顆大小相同的球，有 6 顆紅球、9 顆白球，每顆球被取出的機率都相等，從袋中任意取出一球，則此球是白球的機率是多少？

解：袋子裡總共有 15 顆球，又每顆球被取出的機會都相等，因此這 15 顆球中的任何一顆都有可能被拿出來，因此共有 15 種結果。



由上圖可以知道，取出白球的結果有 9 種，因此機率為 $\frac{9}{15} = \frac{3}{5}$ 。

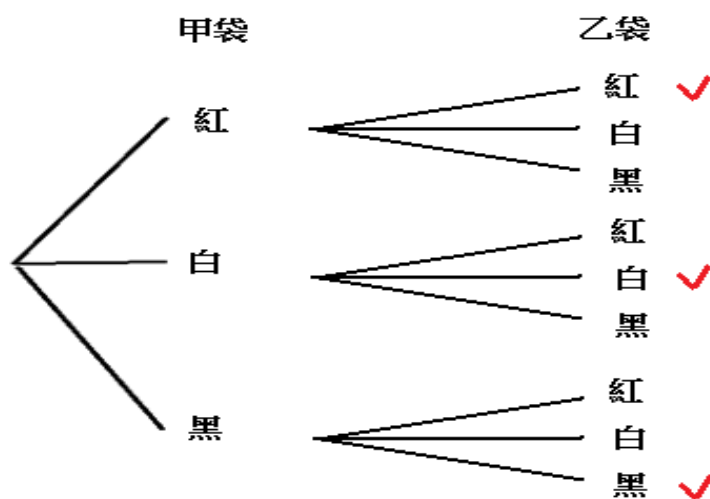
練習1：一個袋子中有 21 個大小相同的球，分別是 5 個紅球、7 個白球、9 個藍球，每個球被取出的機率都相等，從袋中任意取出一球，請回答下列問題：

(1) 此球為白色的機率是【 】。

(2) 此球為紅色的機率是【 】。

範例2：有甲、乙兩個袋子，甲袋中有紅球、白球、黑球各一個，乙袋中有紅球、白球、黑球各一個，現在從甲、乙兩袋各任取一球，則取出的兩球是同色球的機率為何？

解：



由上圖可知，從甲乙兩袋各取一球共有 9 種結果，其中取出

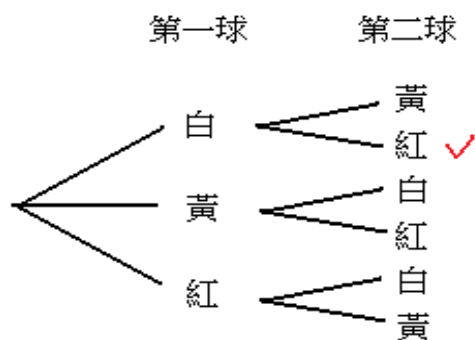
的兩球為同色的結果有 3 種，因此機率為 $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

練習 2.1：有甲、乙兩個袋子，甲袋中有黃球、藍球、綠球各一個，乙袋中有黃球、藍球各一個，現在從甲、乙兩袋各任取一球，則取出的兩球是不同色球的機率為何？

練習 2.2：承練習 2.1，兩球是同色的機率為何？

範例 3：一盒子內有同樣質料且同樣大小的白球、黃球、紅球各一個，先取第一球出來後不再放回，然後再拿第二球，則先拿到白球，再拿到紅球的機率是多少？

解：假設取出的第一球為紅球，因為取後不再放回，因此取第二顆球時便不會有取出紅球的可能。因此我們可以畫出樹狀圖如下：



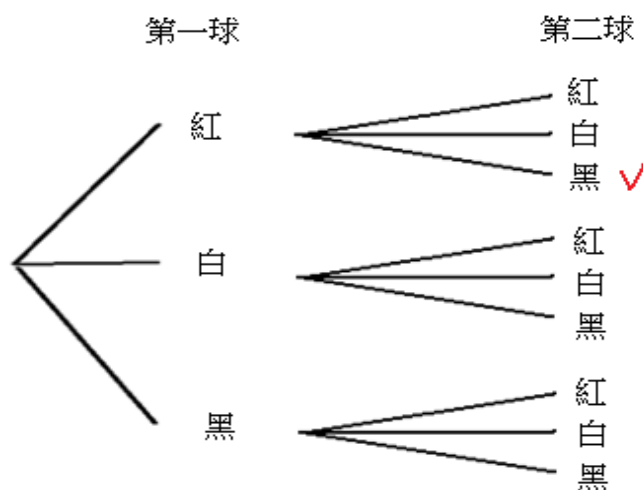
由上圖可看出總共有 6 種結果，其中第一球為白色第二球為紅色的結果有一種，因此機率為 $\frac{1}{6}$ 。

練習 3.1：一盒子內有同樣質料且同樣大小的藍球、黑球、紅球各一個，先取第一球出來後不再放回，然後再拿第二球，則第二球是黑球的機率是多少？

練習 3.2：承練習 3.1，請問第一球是黑球且第二球是紅球的機率是多少？

範例 4：一袋子內有同樣材質且大小相同的白球、黑球、紅球各一個，先取出第一球後再放回，然後再拿第二球，則第一球是紅球、第二球是黑球的機率是多少？

解：假設取出的第一球為紅球，因為取後再放回，因此取第二顆球時會有取出紅球的可能。因此我們可以畫出樹狀圖如下：



由上圖可知總共有 9 種結果，其中第一球是紅色、第二球是黑色的結果有一種，因此機率為 $\frac{1}{9}$

練習 4.1： 一袋子內有同樣材質且大小相同的藍球、綠球、黃球各一個，先取出第一球後再放回，然後再拿第二球，則第一球是藍球的機率是多少？

練習 4.2： 承練習 4.1，請問第一球是藍球且第二球是黑球的機率是多少？

小試身手

1. 有一袋子，袋中有 4 個白球、6 個藍球，今由袋中任意抽出一球，請問取到藍球的機率為何？
2. 有一袋子，袋中有 3 個紅球、2 個黑球，今由袋中取出第一球後不
放回，再取第二球，請回答下列問題：
 - (1) 兩球都是黑色的機率是【 】。
 - (2) 兩球一紅一黑的機率是【 】。

3. 有甲、乙兩個袋子，甲袋中有紅球、白球各一個，乙袋中有白、黑球各一個，現在從甲、乙兩袋各任取一球，請回答下列問題：
- (1) 兩球不同色的機率是【 】。
- (2) 兩球同色的機率是【 】。
-
4. 一袋中有大小、質地相同的桌球，球上標有號碼，其中有 1 個 1 號球、2 個 2 號球、3 個 3 號球、4 個 4 號球、5 個 5 號球，如果每個球被取出的機會相同，今從袋中取出一球，請問：
- (1) 取到 1 號球的機率是【 】。
- (2) 取到 3 號球的機率是【 】。
- (3) 取到奇數號球的機率是【 】。
-
5. 一盒子內置有同樣質料且同樣大小的白球、黃球、紅球各一個，先拿一球出來後再放回，然後再拿第二球，則：
- (1) 第一球取到黃球的機率是【 】。
- (2) 第二球取到白球的機率是【 】。

6. 有甲、乙兩袋，甲袋內有 4 顆白球、4 顆紅球，乙袋內有 3 顆白球、3 顆紅球。今翰翰蒙著眼任意從甲、乙袋中各抽出一球，取到的兩球皆為白色的機率是【 】。
7. 紙箱內有一顆白球、兩顆黑球，每顆球的大小相同，被抽出的機率也相同。若取出白球得 1 分，取出黑球可得 5 分，則小雯從箱內取出第一球後不放回，再取出第二球，請回答下列問題：
- (1) 第一球取到黑球的機率是【 】。
- (2) 第二球取到白球的機率是【 】。
- (3) 第一球分數等於第二球的分數的機率是【 】。
8. 承第 7 題，若小雯取出第一球後再放回，再取第二球，請回答下列問題：
- (1) 第一球取到黑球的機率是【 】。
- (2) 第二球取到白球的機率是【 】。
- (3) 第一球分數等於第二球的分數的機率是【 】。