

單元三 二次函數的最大值或最小值

主題一 複習函數值與函數圖形座標

一、函數值：

若 y 是 x 的函數時，可表示為 $y = f(x)$ 。當 $x = a$ 時，我們可以得到 $y = f(a)$ ；當 x 坐標為 a 時， y 坐標也就是此時的函數值 $f(a)$ ，並且坐標 $(a, f(a))$ 的點在函數 $y = f(x)$ 的圖形上。

觀念一點通 若 $y = f(x)$ 為 x 的函數，則此函數圖形會通過直角座標平面上 $(a, f(a))$ 這一點。

範例 1 二次函數 $y = f(x) = 3x^2 + 2$ ，試求出

- (1) 函數值 $f(0)$ (2) $x = 2$ 時的函數值。

解：(1) 把函數式 $y = f(x) = 3x^2 + 2$ 所有 x 代入 0，得

$$y = f(0) = 3 \times 0^2 + 2 = 2, \text{ 故函數值 } f(0) = 2。$$

(2) 求 $x = 2$ 時的函數值，把函數式 $y = f(x) = 3x^2 + 2$ 所有 x

代入 2，得 $y = f(2) = 3 \times 2^2 + 2 = 14$ ，故 $x = 2$ 時的函數值為 14。

練習 1.1 二次函數 $y = f(x) = 3(x+1)^2 - 3$ ，求函數值 $f(-1)$ 。

練習 1.2 二次函數 $y = f(x) = -x^2 + x - 3$ ，求 $x=1$ 時的函數值。

二、函數值與函數圖形坐標間的關係：

範例 2 二次函數 $y = f(x) = ax^2 - c$ 的圖形通過 $(3, 5)$ 和 $(-7, 14)$ 兩點，
試求函數值 $f(3)$ 和 $f(-7)$ 。

解：二次函數 $y = f(x) = ax^2 - c$ 的圖形通過點 $(3, 5)$ ，表示該
函數若 $x=3$ ，則 $y=5$ 。

把函數式 $y = f(x) = ax^2 - c$ 中的 x 代入 3、 y 代入 5，得

$$5 = f(3) = a \times 3^2 - c，所以 f(3) = 5。$$

我們用相同的方法處理點 $(-7, 14)$ ，得到

$$14 = f(-7) = a \times (-7)^2 - c，所以 f(-7) = 14。$$

重點提示

若所求的函數值對應到的 x 值與已知點的 x 坐標相同時，不需要用求出 a 、 c 等未知係數，利用函數圖形上的 y 坐標即為函數值，可以找到該函數值。

若所求的函數值對應到的 x 值與已知點的 x 坐標不相同時，仍須將點坐標代入函數式，先將未知係數求出，方能進行函數式的運算。

練習 2.1 二次函數 $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ 的圖形通過 $(-9, \frac{1}{71})$ 和 $(15, -379)$ 兩點，試求函數值 $f(-9)$ 和 $f(15)$ 。

練習 2.2 已知二次函數 $y = f(x) = a(x-k)^2 + b(x-k) + c$ 的函數值

$f(12) = 2$ 、 $f(-\frac{1}{2}) = -5$ ，且此二次函數的圖形通過 $(12, t)$ 和 $(-\frac{1}{2}, s)$ 兩點，則 $t + s = ?$

範例 3 二次函數 $y = f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 7$ ，已知 $f(a) = 17$ ，試求 a 的值可能是多少？

解：因為 $f(a) = 17$ ，所以 $y = f(a) = \frac{1}{2} \times a^2 - 7 = 17$ ，

我們得到一個 a 的一元二次方程式 $\frac{1}{2} \times a^2 - 7 = 17$ ，解之

$$\frac{1}{2} \times a^2 - 7 + 7 = 17 + 7$$

$$\frac{1}{2} \times a^2 = 24$$

$$a^2 = 48$$

我們把左右同取平方根會得到 a 的值

$$a = \pm\sqrt{48} = \pm 4\sqrt{3}$$

(因為 $48 = 16 \times 3$ ，所以 $\sqrt{48} = \sqrt{16 \times 3} = \sqrt{16} \times \sqrt{3} = 4 \times \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$)

我們可以知道 $(4\sqrt{3}, 17)$ 和 $(-4\sqrt{3}, 17)$ 這兩點都在函數的圖形上。

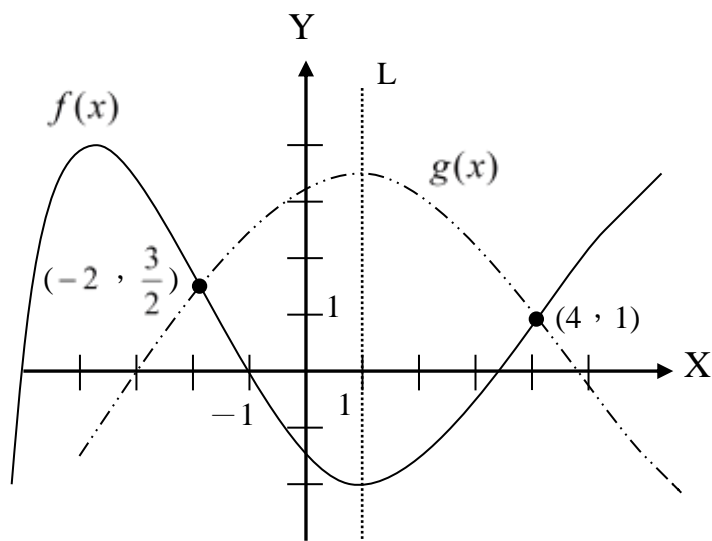
練習 3 二次函數 $y = f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 8$ ，圖形通過 $(r, -8)$ ，

則 r 是多少？

重點提示

利用函數式分別寫出含有 r 的方程式，並利用解一元二次方程式的方法，求出 r 的值。

範例 4 兩個函數 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 的圖形如下，試回答下列問題。



- (1) 當 $x = -2$ 時， $f(x)$ 和 $g(x)$ 的函數值各是多少？
- (2) 當 $x = 1$ 時， $f(x)$ 和 $g(x)$ 的函數值何者較大？

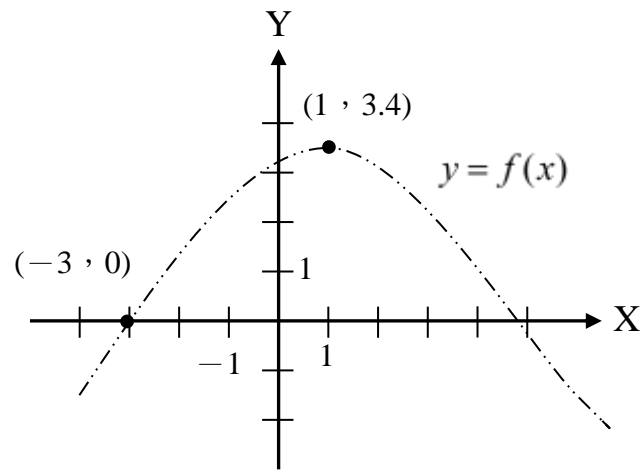
解：(1) 因為 $(-2, \frac{3}{2})$ 這一點同時在 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的圖形上。當 $x = -2$

時， $f(x)$ 和 $g(x)$ 的函數值均為該點的 y 坐標 $\frac{3}{2}$ ，也就是說

$$f(-2) = \frac{3}{2}, g(-2) = \frac{3}{2}。$$

- (2) 當 $x = 1$ 時，我們可以畫出一條 $x = 1$ 的鉛垂線 L (如圖)，直線 L 與 $f(x)$ 圖形的交點在下半平面，所以其交點的 y 坐標為負值，表示 $f(1) < 0$ ；直線 L 與 $g(x)$ 圖形的交點在上半平面，所以其交點的 y 坐標為正值，表示 $g(1) > 0$ ，得到 $f(1) < g(1)$ ，故當 $x = 1$ 時， $g(x)$ 的函數值較大。

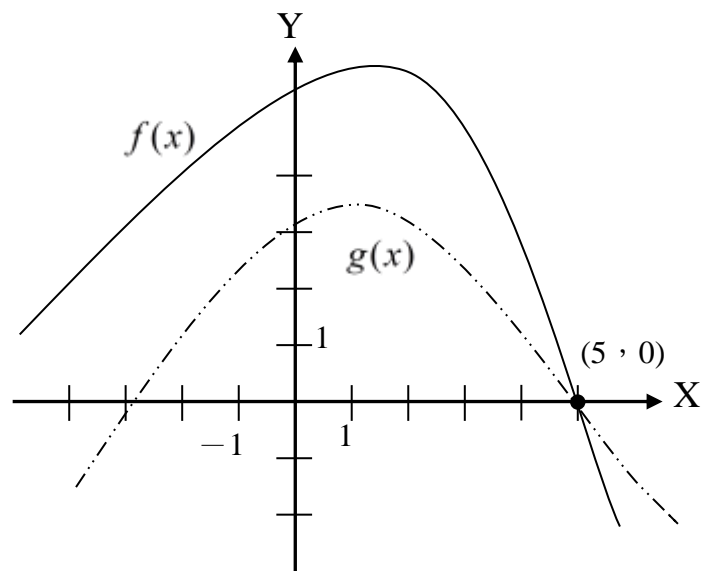
練習 4 函數 $y = f(x)$ 的圖形如下，試回答下列問題。



(1) 求出函數值 $f(-3)$ 和 $f(1)$ 。

(2) 比較 $f(-3)$ 和 $f(3)$ 的大小。

動動腦 兩函數 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 的圖形如下，試判斷下列各敘述的對錯。



- () 1. $f(5) = 0$ () 2. $f(-4) \times g(-4) > 0$
- () 3. $f(6) > g(6)$ () 4. $f(0) < g(0)$
- () 5. $f(5) \times g(5) = 0$

牛刀小試

1. 函數 $f(x) = -2x^2 + 5$ ，則

- (1) $f(x)$ 在 $x = 0$ 時的函數值。

(2) 此函數圖形通過 $(-3, t)$ ，求 t 。

(3) 此函數圖形通過 $(A, -45)$ ，求 A 可能的值。

2. 已知二次函數 $f(x) = k(x-4)^2 + s$ 的圖形通過 $(4, 19)$ 、 $(-\frac{2}{3}, 0)$

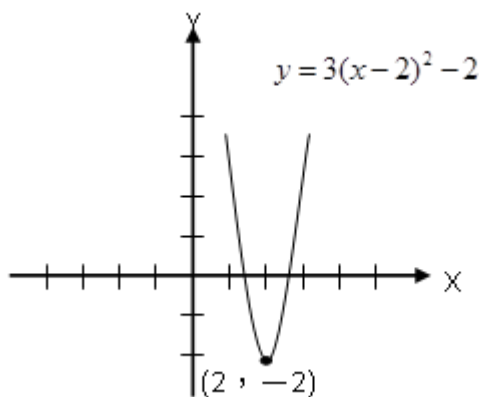
兩點，試求 $f(4) + f(-\frac{2}{3}) = ?$

數學溝通橋

1. 我對於函數值的認識 _____
- (A)以前就會囉~~簡單啦！
 - (B)利用函數式求函數值都沒問題遇到圖形就眼花。
 - (C)以前很容易弄錯複習完就比較好囉~~
 - (D)雖然學過卻有點忘記，複習一下就記起來了。
 - (E)其他_____
2. 我覺得函數圖形和函數值的關係是_____。
- (A)單純是老師們拿來整學生的題材
 - (B)兩者之間真的有關係但是我還不能掌握
 - (C)函數值和點的座標有關
 - (D)一個點的座標有 x 坐標和 y 坐標兩種，函數值只有一種很容易讓人混亂
 - (E) 其他_____。
3. 複習完函數圖形和函數值後，我覺得比較難的是_____
- (A)利用函數圖形上的點坐標找出函數值
 - (B)給我很複雜的函數圖形，要判斷函數值的大小或正負
 - (C)需要利用解一元二次方程式的技巧
 - (D)利用函數值回推函數圖形通過哪個點
 - (E)其他_____。

主題二 利用函數圖形找二次函數的最大值與最小值

我們知道二次函數圖形的開口方向有向上與向下兩種，例如二次函數 $y = 3(x-2)^2 - 2$ 的圖形就是開口向上，圖形當中最底的點就是頂點 $(2, -2)$ 。如下圖，無論 x 的值是多少，圖形上任一點的 y 坐標均不會比 -2 更小，利用函數圖形的 y 坐標即為其函數值的觀念，該函數之函數值一定不小於 -2 ，也就是說 $y = 3(x-2)^2 - 2 \geq -2$ 。當 $x = 2$ 時，二次函數 $y = 3(x-2)^2 - 2$ 有最小值 -2 。



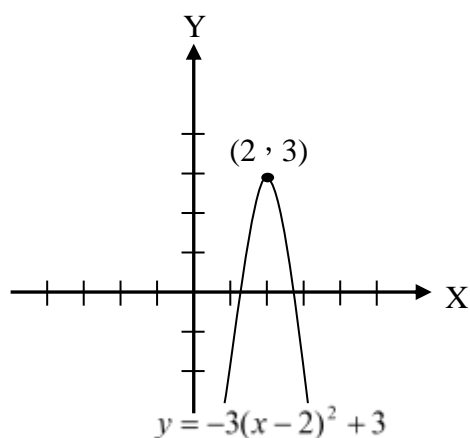
重點提示

函數 $y = 3(x-2)^2 - 2$ 圖形上的點，其 y 坐標都不小於頂點的 y 坐標 -2 ，故其函數值的最小值為 -2 。

觀念一點通

二次函數 $y = a(x-h)^2 + k$ ，當 $a > 0$ 時，圖形開口向上。因為 $(x-h)^2 \geq 0$ 且 $a > 0$ ，得 $a(x-h)^2 \geq 0$ ，左右同加 k 得 $a(x-h)^2 + k \geq k$ ，所以函數值大於或等於 k ，當 $x = h$ 時 $a(x-h)^2 + k = k$ 。即二次函數 $y = a(x-h)^2 + k$ 在 $x = h$ 時，有最小值 k 。

例如二次函數 $y = -3(x-2)^2 + 3$ 的圖形是開口向下，頂點(2, 3) 就是整個函數圖形的最高點。如下圖，無論 x 的值是多少，函數圖形上任一點的 y 坐標均不會大於頂點的 y 坐標 3，利用函數圖形的 y 坐標即為其函數值的觀念，該函數之函數值一定不大於 3，也就是說 $y = -3(x-2)^2 + 3 \leq 3$ 。當 $x = 2$ 時，二次函數 $y = -3(x-2)^2 + 3$ 有最大值 3。



重點提示

函數 $y = -3(x-2)^2 + 3$ 圖形上的點，其 y 坐標都不大於頂點的 y 坐標 3，故其函數值的最大值为 3。

觀念一點通

二次函數 $y = a(x-h)^2 + k$ ，當 $a < 0$ 時，其圖形開口向下。因為 $(x-h)^2 \geq 0$ 且 $a < 0$ ，得 $a(x-h)^2 \leq 0$ 。左右同加 k 得 $a(x-h)^2 + k \leq k$ ，所以函數值小於或等於 k ，當 $x = h$ 時， $a(x-h)^2 + k = k$ 。即二次函數 $y = a(x-h)^2 + k$ 在 $x = h$ 時，有最大值 k 。

一、頂點在 y 軸上的二次函數求最大值或最小值：

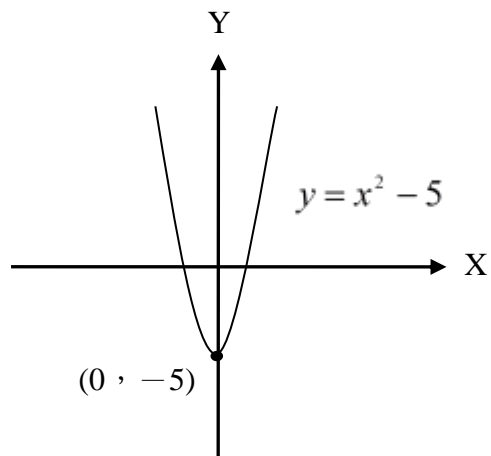
範例 5 判斷二次函數 $y = x^2 - 5$ 是否有最大值或最小值，並求其值。

解：[解法一] 利用函數圖形

二次函數 $y = x^2 - 5$

，圖形如右。函數的
頂點為整個函數圖形

的最低點，頂點坐標為
 $(0, -5)$ ，



即 $x = 0$ 時，函數值為 -5 。

函數圖形上任一點的 y 坐標均不小於 -5 ，

故 $y = x^2 - 5 \geq -5$ 。

二次函數 $y = x^2 - 5$ ，在 $x = 0$ 時，有最小值 -5 。

[解法二]用不等式

二次函數 $y = x^2 - 5$ 中 $x^2 \geq 0$ （平方不會出現負值），

不等式左右同減 5 ，得 $x^2 - 5 \geq 0 - 5$

故 $y = x^2 - 5 \geq -5$ 。

即二次函數 $y = x^2 - 5$ ，在 $x = 0$ 時，有最小值 -5 。

練習 5 利用圖形判斷二次函數 $y = 2x^2 + 4$ 是否有最大值或最小值，並求其值。

範例 6 判斷二次函數 $y = -2x^2$ 是否有最大值或最小值，並求其值。

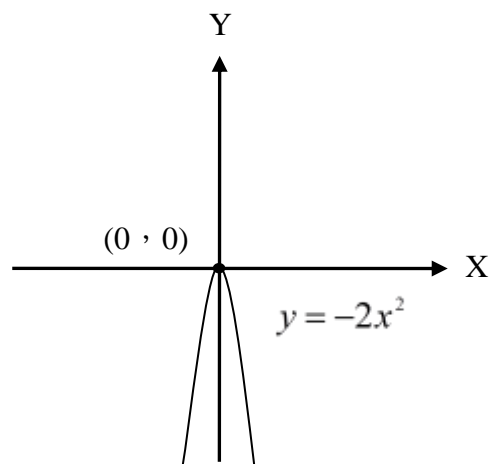
解：[解法一]利用函數圖形

二次函數 $y = -2x^2$ 的

圖形如右。函數的頂點為

整個函數圖形的最高點，

頂點坐標為 $(0, 0)$ 。



即 $x = 0$ 時，函數值為 0 。函數圖形上任一點的 y 坐標

均不大於 0 ，故所有函數值 ≤ 0 。

二次函數 $y = -2x^2$ ，在 $x = 0$ 時，有最大值 0 。

[解法二]用不等式

二次函數 $y = -2x^2$ 中 $x^2 \geq 0$ ，左右同乘以 -2 得到

$-2x^2 \leq 0$ (不等式同乘以 -2 時，大於會變成小於)，

故 $y = -2x^2 \leq 0$ 。

即二次函數 $y = -2x^2$ ，在 $x = 0$ 時，有最大值 0

練習 6 判斷下列二次函數是否有最大值或最小值，並求其值。

(1) $y = -x^2 + 4$

(2) $y = ax^2 + 2$ 且 $a < 0$

二、利用二次函數的頂點式求最大值或最小值

範例 7 判斷二次函數 $y = 3(x + 2)^2 - 5$ 是否有最大值或最小值，並求其值。

解：[解法一]利用函數圖形

二次函數 $y = 3(x + 2)^2 - 5$

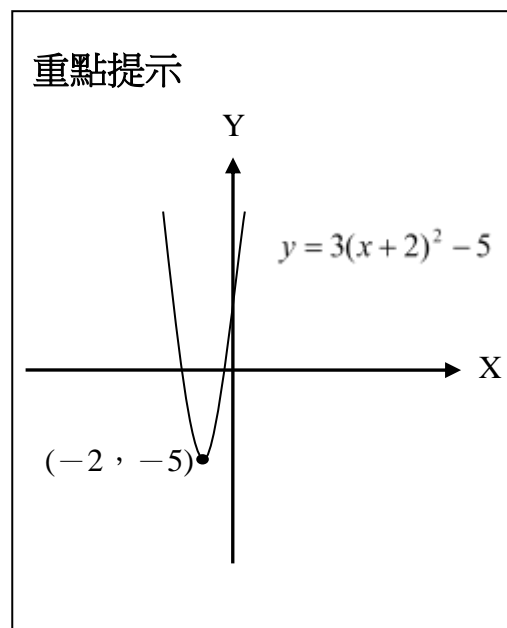
的圖形如右。函數的頂點

為整個圖形的最低點，

頂點坐標為 $(-2, -5)$ 。

當 $x = -2$ 時，函數值是 -5

函數圖形上任一點的



y 坐標均不小於 -5 ，故所有函數值 ≥ -5 。

二次函數 $y = 3(x + 2)^2 - 5$ ，在 $x = -2$ 時有最小值 -5 。

[解法二]用不等式

二次函數 $y = 3(x + 2)^2 - 5$ 中， $(x + 2)^2 \geq 0$ ，

左右同乘以 3 得 $3(x + 2)^2 \geq 0$ ，

再左右同減 5 得到 $3(x + 2)^2 - 5 \geq 0 - 5$ ，

故 $y = 3(x + 2)^2 - 5 \geq -5$ 。

二次函數 $y = 3(x + 2)^2 - 5$ ，當 $x = -2$ 時，有最小值 -5 。

練習 7 判斷下列二次函數是否有最大值或最小值，並求其值。

(1) $y = 5(x - 3)^2 + 3$

(2) $y = \frac{1}{9}(x - 1)^2 + 3$

範例 8 判斷二次函數 $y = -\frac{1}{2}(x-1)^2 + 2$ 是否有最大值或最小值，並求其值。

解：[解法一]利用函數圖形

$$\text{二次函數 } y = -\frac{1}{2}(x-1)^2 + 2$$

圖形如右圖。

最低點為 $(1, 2)$ 。

當 $x=1$ 時，函數值是 2

函數圖形上任一點的

y 坐標均不大於 2，

$$\text{得到 } y = -\frac{1}{2}(x-1)^2 + 2 \leq 2,$$

當 $x=1$ 時，二次函數 $y = -\frac{1}{2}(x-1)^2 + 2$ 有最大值 2。

[解法二]用不等式

$$\text{二次函數 } y = -\frac{1}{2}(x-1)^2 + 2 \text{ 中，}$$

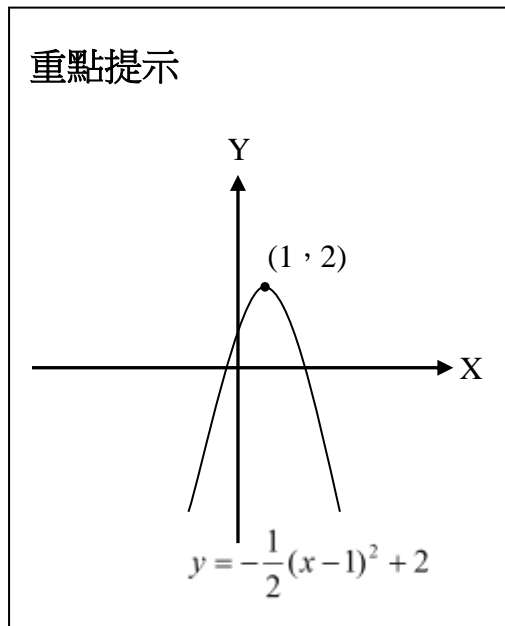
$(x-1)^2 \geq 0$ (平方沒有負值)，

$$\text{左右同乘以 } -\frac{1}{2}, \text{ 得到 } -\frac{1}{2}(x-1)^2 \leq 0$$

(不等式同乘以 -2 時，大於會變成小於)，

$$\text{再同加 } 2 \text{ 得到 } -\frac{1}{2}(x-1)^2 + 2 \leq 2,$$

$$\text{故 } y = -\frac{1}{2}(x-1)^2 + 2 \leq 2.$$



二次函數 $y = -\frac{1}{2}(x-1)^2 + 2$ ，當 $x=1$ 時，有最大值 2。

練習 8.1 判斷二次函數 $y = -\frac{4}{5}(x-3)^2 + 1$ 是否有最大值或最小值，並求其值。

練習 8.2 判斷二次函數 $y = -(x+4)^2 + 1$ 是否有最大值或最小值，並求其值。

牛刀小試

求出下列各二次函數的頂點坐標及最大值或最小值。

1. $y = x^2 + 7$

$$2. \quad y = -x^2 - 5$$

$$3. \quad y = 2(x + 23)^2 - 11$$

$$4. \quad y = -\frac{1}{7}(x - 1)^2 + 5$$

數學溝通橋

1. 我對於二次函數的頂點， _____。

(A)原來不只是頂點還可以求最大值或最小值

(B)本來就不太會求頂點了，現在要下苦工

(C)總是不知道要如何從複雜的式子中，找到正確的頂點坐標

(D)雖然會找頂點坐標，偶爾還是會出錯

(E)其他_____

2. 我對於二次函數的圖形， _____。

(A)整理函數式很容易，要我畫圖就很難

(B)總分不清楚要取幾組點坐標來畫，何時要仔細畫？何時簡單畫？

(C)畫圖耗去我相當多的時間，我不喜歡用話徒來解題

(D)坐標平面跟我不熟，更別提畫二次函數的圖形了

(E)其他_____

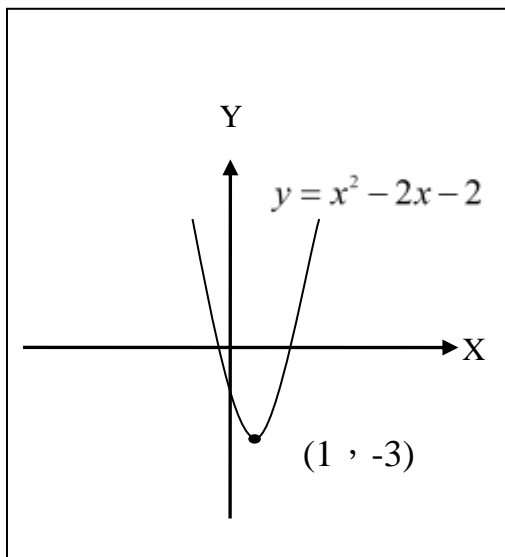
主題三 利用配方法找二次函數的最大值或最小值

二次函數若為 $y = ax^2 + bx + c$ 的形式，關於我們所需要的函數圖形資訊只能得到開口方向，但是無法找到頂點坐標，所以我們必須利用二次函數的配方法，將函數式化為 $y = a(x - h)^2 + k$ 的形式，再利用 $y = a(x - h)^2 + k$ 的形式，得到頂點坐標為 (h, k) ，搭配上係數 a 的正負得到開口方向，讓我們找出函數的最大值或最小值。或是利用不等式推導出函數的最大值或最小值。

例如二次函數 $y = x^2 - 2x - 2$ 僅能知道圖形開口向上，推測出頂點是圖形的最低點，但我們無法找到頂點坐標，所以必須將二次函數的形式利用配方法

$$\begin{aligned}y &= (x^2 - 2x + 1^2 - 1^2) - 2 \\&= (x^2 - 2x + 1^2) - 1 - 2 \\&= (x - 1)^2 - 3\end{aligned}$$

我們由 $y = x^2 - 2x - 2$ 得到 $y = (x - 1)^2 - 3$ ，並畫出它的圖形（如圖）。



$y = (x - 1)^2 - 3$ 形式可以找到頂點坐標為 $(1, -3)$ 。二次函數 $y = x^2 - 2x - 2$ 中，無論 x 的值是多少，圖形上任一點的 y 坐標均不小於 -3 ，所以 $y = x^2 - 2x - 2 = (x - 1)^2 - 3 \geq -3$ ，也就是說當 $x = 1$ 時，二次函數 $y = x^2 - 2x - 2$ 有最小值 -3 。

或者利用不等式的推導，在 $y = (x - 1)^2 - 3$ 的形式中， $(x - 1)^2 \geq 0$ ，

同減掉 3 後得 $(x-1)^2 - 3 \geq -3$ ，故 $y = (x-1)^2 - 3 \geq -3$ ，即二次函數 $y = x^2 - 2x - 2 = (x-1)^2 - 3 \geq -3$ 。

當 $x = 1$ 時，二次函數 $y = x^2 - 2x - 2$ 有最小值 -3 。

一、首項係數為正的配方法

範例 9 判斷二次函數 $y = x^2 - 6x + 1$ 是否有最大值或最小值，並求其值。

解：將 $y = x^2 - 6x + 1$ 配方，得

$$\begin{aligned} y &= (x^2 - 6x + 3^2 - 3^2) + 1 && \text{(配成完全平方式)} \\ &= (x^2 - 6x + 3^2) - 9 + 1 && \text{(將多餘的常數提出括弧外)} \\ &= (x-3)^2 - 8 \end{aligned}$$

[解法一] 利用函數圖形

二次函數 $y = (x-3)^2 - 8$ 中，可以得到圖形開口向上，函數有最小值，且頂點 $(3, -8)$ 為圖形最低點，故

$$y = (x-3)^2 - 8 \geq -8。$$

也就是說 $y = x^2 - 6x + 1 = (x-3)^2 - 8 \geq -8$ 。

當 $x = 3$ 時，二次函數 $y = x^2 - 6x + 1$ 有最小值 -8 。

[解法二] 用不等式

二次函數 $y = (x-3)^2 - 8$ 中， $(x-3)^2 \geq 0$ ，

左右同減 8 得到 $(x-3)^2 - 8 \geq -8$ ，

故 $y = (x-3)^2 - 8 \geq -8$ 。

即二次函數 $y = x^2 - 6x + 1 = (x-3)^2 - 8 \geq -8$ 。

當 $x = 3$ 時，二次函數 $y = x^2 - 6x + 1$ 有最小值 -8 。

練習 9 利用配方法整理二次函數 $y = x^2 - 4x - 2$ ，再判斷二次函數是否有最大值或最小值，並求其值。

範例 10 判斷二次函數 $y = 2x^2 - 12x - 3$ 是否有最大值或最小值，並求其

值。

重點提示

提出首項係數時，僅合併二次項和一次項，常數項保持不變。

$$y = 2(x^2 - 6x) - 3 \quad (\text{提出首項係數 } 2)$$

$$= 2(x^2 - 6x + 3^2 - 3^2) - 3 \quad (\text{配成完全平方式})$$

$$= 2(x^2 - 6x + 3^2) - 9 \times 2 - 3$$

減去完全平方式多出的常數 9 時，記得要乘上首項係數 2。

$$= 2(x - 3)^2 - 18 - 3$$

$$= 2(x - 3)^2 - 21$$

[解法一]利用函數圖形

二次函數 $y = 2(x - 3)^2 - 21$ 中，可以得到圖形開口向上，
函數有最小值，且頂點 $(3, -21)$ 為圖形最低點，故函
數值不小於 -21 。

$$\text{二次函數 } y = 2x^2 - 12x - 3 = 2(x - 3)^2 - 21 \geq -21,$$

當 $x = 3$ 時， $y = 2x^2 - 12x - 3$ 有最小值 -21 。

[解法二]看不等式

二次函數 $y = 2(x-3)^2 - 21$ 中， $(x-3)^2 \geq 0$ ，

左右同乘以 2，得到 $2(x-3)^2 \geq 0$ ，

再同減 21 得到 $2(x-3)^2 - 21 \geq -21$ ，

則 $y = 2(x-3)^2 - 21 \geq -21$ ，

得到二次函數 $y = 2x^2 - 12x - 3 = 2(x-3)^2 - 21 \geq -21$ 。

當 $x = 3$ 時，二次函數 $y = 2x^2 - 12x - 3$ 有最小值 -21 。

練習 10 判斷二次函數 $y = 2x^2 + 20x + 10$ 是否有最大值或最小值，並求其值。

二、首項係數為負的配方法

範例 11 判斷二次函數 $y = -2x^2 + 4x$ 是否有最大值或最小值，並求其值。

解：將 $y = -2x^2 + 4x$ 配方，得

$$y = -2(x^2 - 2x) \quad (\text{提出首項係數 } -2)$$

$$= -2(x^2 - 2x + 1^2 - 1^2) \quad (\text{配成完全平方式})$$

$$= -2(x^2 - 2x + 1^2) - 1 \times (-2)$$

減去完全平方式多出的常數 1 時，記得要乘上首項係數 -2 。

$$= -2(x - 1)^2 + 2$$

[解法一] 利用函數圖形

二次函數 $y = -2(x - 1)^2 + 2$ 中，可以得到圖形開口向下，函數有最大值，且頂點 $(1, 2)$ 為圖形最高點，故函數值不大於 2。二次函數 $y = -2x^2 + 4x = -2(x - 1)^2 + 2 \leq 2$ ，也就是說當 $x = 1$ 時， $y = -2x^2 + 4x$ 有最大值 2。

[解法二] 利用不等式

二次函數 $y = -2(x-1)^2 + 2$ 中， $(x-1)^2 \geq 0$ ，

左右同乘以 -2 ，得到 $-2(x-1)^2 \leq 0$ ，

再同加 2 得到 $-2(x-1)^2 + 2 \leq 2$ ，

故 $y = -2(x-1)^2 + 2 \leq 2$ ，

即二次函數 $y = -2x^2 + 4x = -2(x-1)^2 + 2 \leq 2$ 。

當 $x = 1$ 時，二次函數 $y = -2x^2 + 4x$ 有最大值 2 。

練習 11 判斷二次函數 $y = -3x^2 + 12x$ 是否有最大值或最小值，並求其值。

範例 12 判斷二次函數 $y = -3x^2 + 24x - 48$ 是否有最大值或最小值，並求其值。

解：將 $y = -3x^2 + 24x - 48$ 配方，得

$$\begin{aligned} y &= -3(x^2 - 8x) - 48 \\ &= -3(x^2 - 8x + 4^2 - 4^2) - 48 \\ &= -3(x^2 - 8x + 4^2) - 16 \times (-3) - 48 \\ &= -3(x - 4)^2 - (-48) - 48 \\ &= -3(x - 4)^2 + 48 - 48 = -3(x - 4)^2 \end{aligned}$$

[解法一]看圖形

二次函數 $y = -3(x - 4)^2$ 中，可以得到圖形開口向下，函數有最大值，且頂點 $(4, 0)$ 為圖形最高點，故函數值不大於 0。

二次函數 $y = -3x^2 + 24x - 48 = -3(x - 4)^2 \leq 0$ 。

也就是說當 $x = 4$ 時， $y = -3x^2 + 24x - 48$ 有最大值 0。

[解法二]看不等式

二次函數 $y = -3(x-4)^2$ 中， $(x-4)^2 \geq 0$ ，

左右同乘以 -3 ，得到 $-3(x-4)^2 \leq 0$ ，

$$y = -3(x-4)^2 \leq 0，$$

即二次函數 $y = -3x^2 + 24x - 48 = -3(x-4)^2 \leq 0$ 。

當 $x=4$ 時，二次函數 $y = -3x^2 + 24x - 48$ 有最大值 0 。

練習 12.1 判斷二次函數 $y = -2x^2 + 16x - 26$ 是否有最大值或最小值，並求其值。

練習 12.2 判斷二次函數 $y = -x^2 + bx + 2$ 頂點是 $(1, -3)$ ，則

(1) 請求出 b 的值

(2) 該二次函數是否有最大值或最小值，並求其值。

牛刀小試

求出下列各二次函數的頂點，及其最大值或最小值。

1. $y = 2x^2 - 8x - 5$

$$2. y = -3x^2 - 18x - 3$$

$$3. y = 2x^2 + 8x + 2$$

$$4. y = -3x^2 + 12x - 8$$

5. 二次函數 $y = -x^2 + bx + c$ 和兩坐標軸相交於 $(8, 0)$ 、 $(-2, 0)$ 兩點，請求出此二次函數的頂點及其最大值或最小值。

數學溝通橋

1. 對於二次函數的配方法 _____。

- (A) 這是國中對我最難的一個方法
- (B) 只要記好步驟 **STEP BY STEP**，比那些應用問題還要簡單
- (C) 無論一元二次方程式還是二次函數我都對配方法舉白旗
- (D) 其實只要有出現指數，我就眼花撩亂，根本看不懂式子
- (E) 其他_____

2. 二次函數的配方法常數項的變化，_____。
- (A)每次都搞不清楚要加還是要減
 - (B)相較於一元二次方程式的配方法，二次函數的比較容易算錯
 - (C)只要二次項係數是正的，我都沒有問題
 - (D)無論二次項係數是正數還是負數，我對於沒有等號兩邊一起加減，總是很難接受
 - (E) 其他_____。
3. 二次函數的最大值或最小值，_____。
- (A)其實我還是常常會弄錯，畢竟要從函數式想到圖形的開口方向和點頂坐標，我還沒辦法那麼快，總是要想很久
 - (B)頂點沒辦法從函數式中直接找到，我就不想算了
 - (C)可以讓我再一次練習配方法，我覺得還不錯
 - (D)幹麻要知道這麼複雜算式的最大值還是最小值？
 - (E) 其他_____。

腦筋急轉彎

什麼時候看到的月亮最大？