單元二　二次函數的圖形

主題一、複習一次函數的圖形

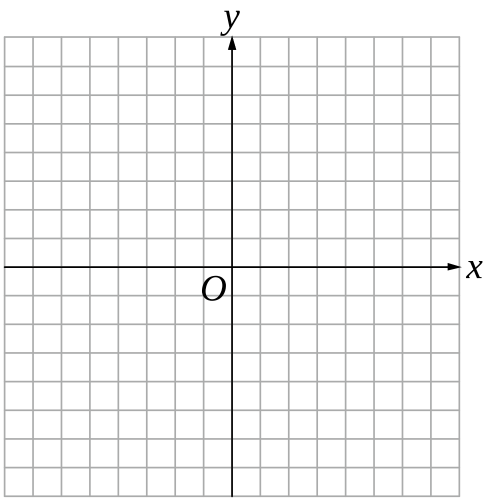
1. 一次函數的圖形：

在正式學習新單元前，讓我們先來回憶一下「一次函數」的圖形長相。

動手做做看，請你畫出下列一次函數的圖形：

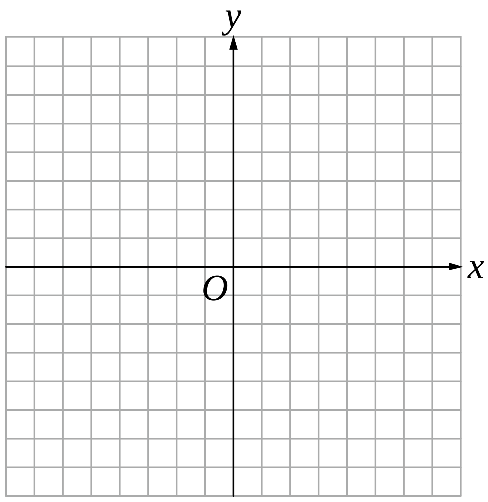
練習 1：$y = x$

x		
y		



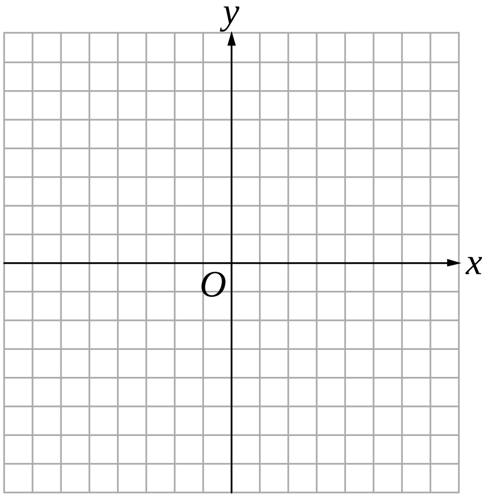
練習 2：$y = -x$

x		
y		



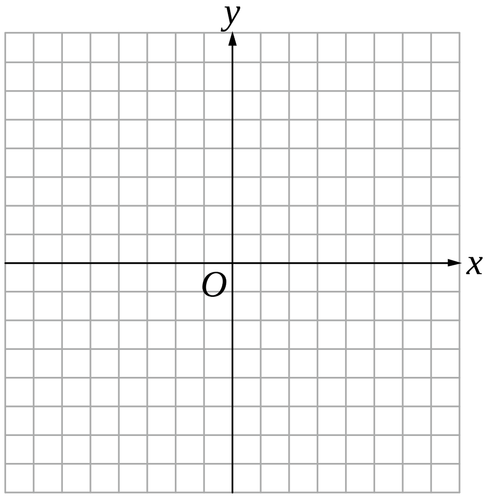
練習 3：$y = x + 2$

x		
y		



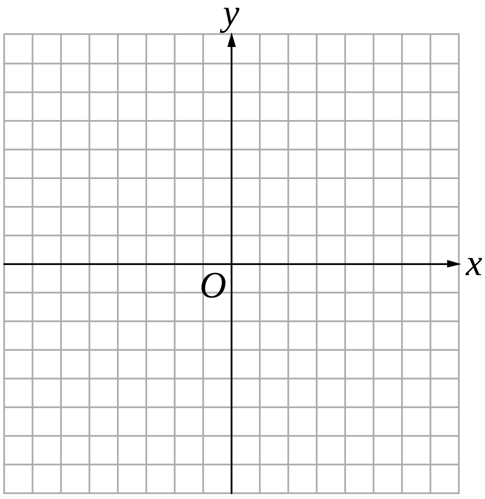
練習 4：$y = -(x + 2)$

x		
y		



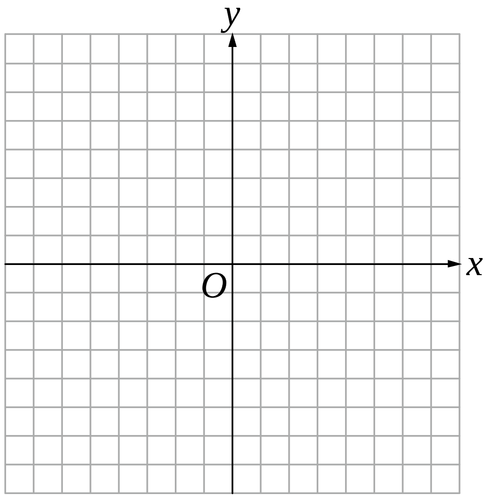
練習 5：$y = 2x + 3$

x		
y		



練習 6：$y = -2x + 1$

x		
y		



2.小結：

a.當 y 是 x 的函數時，自變數 x 的最高次方為一次方，稱為一次函數，

可用$y = ax + b$來表示。

b.一次函數的圖形為一條直線。

想想看，當自變數 x 的最高次方為二次方時，也就是二次函數，你認

為它的圖形會是甚麼樣子呢？

主題二、二次函數的圖形

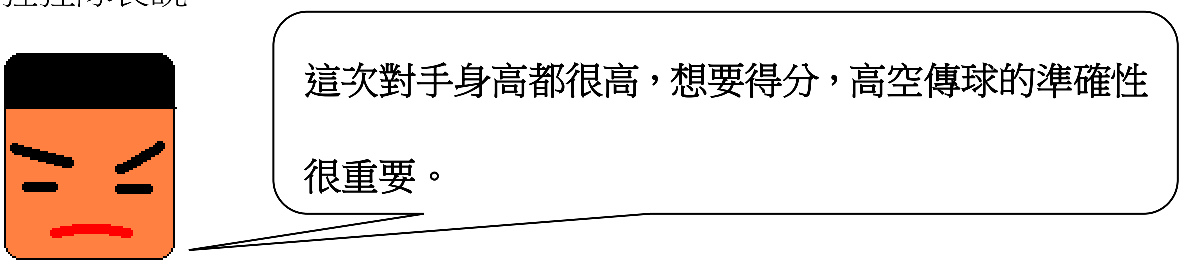
1. 情境：

湘北國中將於一星期後的全國聯賽裡對戰海南國中，於是大猩猩隊長

決定集合隊員進行特訓。

大猩猩隊長的魔鬼特訓（1）---高空傳球的技巧

大猩猩隊長說：



為了加強隊員的判斷力，大猩猩隊長找了一間特殊的體育館，這間體

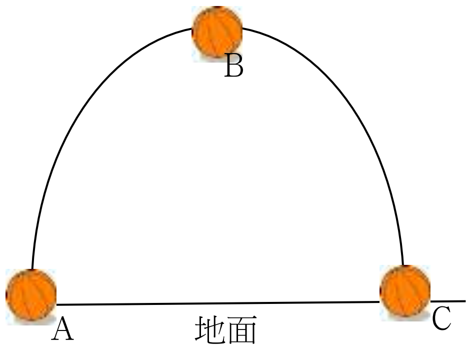
育館的地面像鏡子一樣，能完全反映地面上所有事物。

發揮你的觀察力，觀察高空傳球時，籃球在空中飛行及映在地面上的

軌跡。

問題一、

下圖為籃球在空中飛行的軌跡：



1.籃球飛行的軌跡是否左右對稱？
是的話，請在圖上畫出對稱軸。

2.圖形從哪一點開始向下飛落？

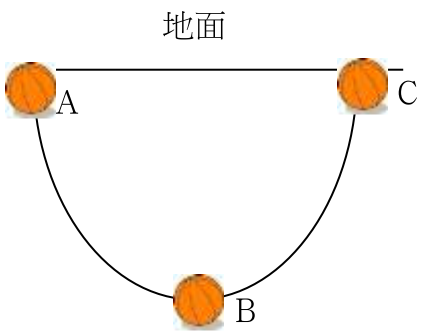
____

3.籃球飛行的軌跡（圖形）為？

____

問題二、

已知地面為一平面鏡，下圖為籃球在鏡中的軌跡：



1.籃球在鏡中的軌跡是否左右對稱？
是的話，請在圖上畫出對稱軸。

2.圖形從哪一點開始向上爬升？

____

3.籃球在鏡中的軌跡（圖形）為？

____

問題三、

你認為籃球在空中飛行的軌跡與在鏡中的軌跡有何關係？

____

事實上，不論在空中飛行的軌跡或是在鏡中的軌跡，它們的圖形都稱為「拋物線」，且二次函數的圖形也正是拋物線。

接下來，讓我們來繪製二次函數的圖形。

2. 二次函數的圖形

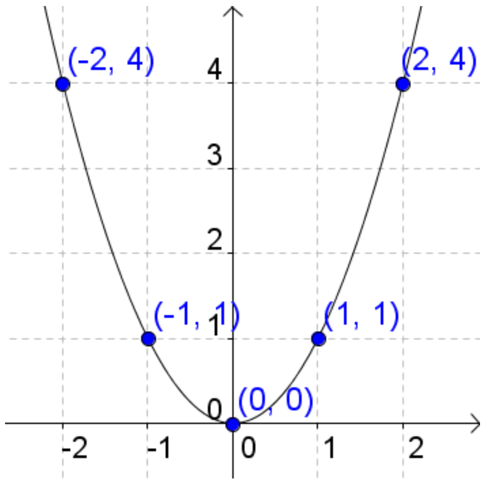
範例 1：$y = x^2$

解析：

(1)先畫表格找點。

x	-2	-1	0	1	2
y	4	1	0	1	4

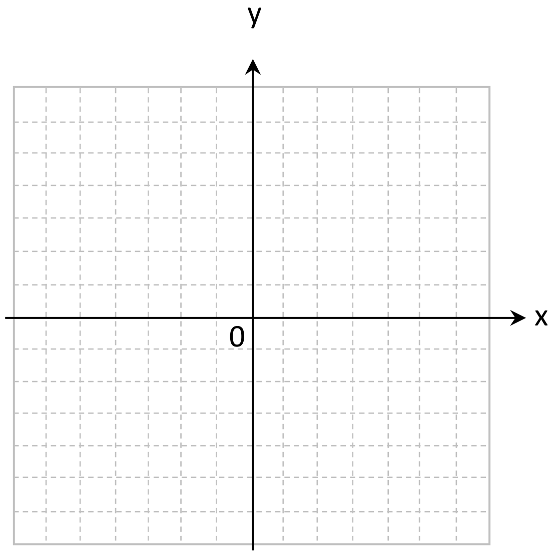
(2)將點描到直角坐標上，以平滑的曲線連接起來。



開口方向：向上

頂點坐標：（ 0 ， 0 ）

對稱軸： $x = 0$



練習 1：$y = 2x^2$

解：

x					
y					

開口方向：______________

頂點坐標：______________

對稱軸：________________

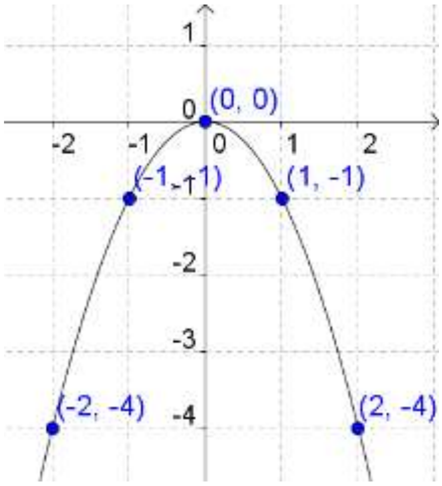
範例 2：$y = -x^2$

解析：

(1)先畫表格找點。

x	-2	-1	0	1	2
y	-4	-1	0	-1	-4

(2)將點描到直角坐標上，以平滑曲線連接起來。



開口方向：向下

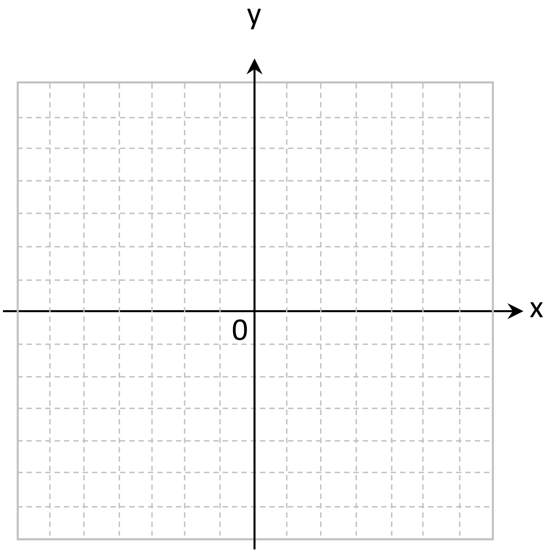
頂點坐標：(0 ， 0)

對稱軸： $x = 0$

練習 2：$y = -2x^2$

解：

x					
y					



開口方向：____________

頂點坐標：____________

對稱軸：____________

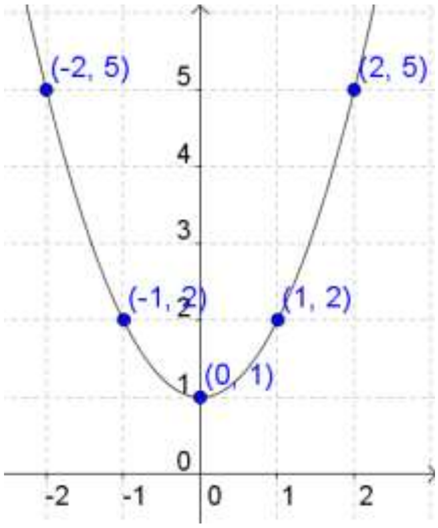
範例 3：$y = x^2 + 1$

解析：

(1)先畫表格找點坐標。

x	-2	-1	0	1	2
y	5	2	1	2	5

(2)將點描到直角坐標上，並以平滑曲線連接。



開口方向：向上

頂點坐標：(0 ， 0)

對稱軸： $x = 0$

練習 3：$y = x^2 + 3$

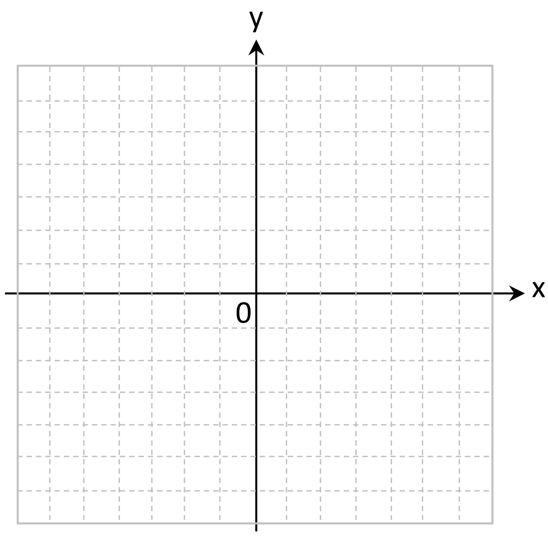
解：

x					
y					

開口方向：__________

頂點坐標：__________

對稱軸：__________



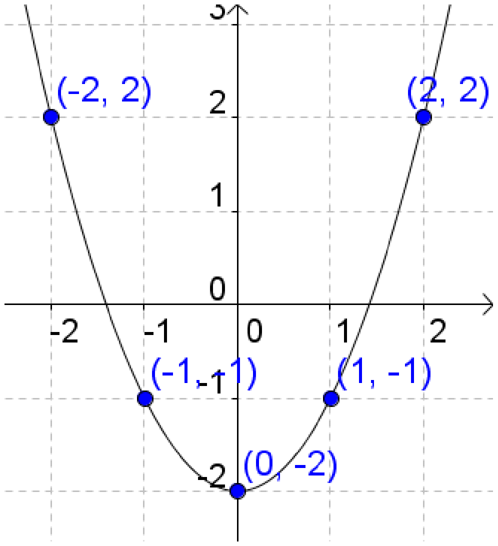
範例 4：$y = x^2 - 2$

解析：

(1)畫表格找點坐標。

x	-2	-1	0	1	2
y	2	-1	-2	-1	2

(2)將點描到直角坐標上，並以平滑曲線連接。



開口方向：向上

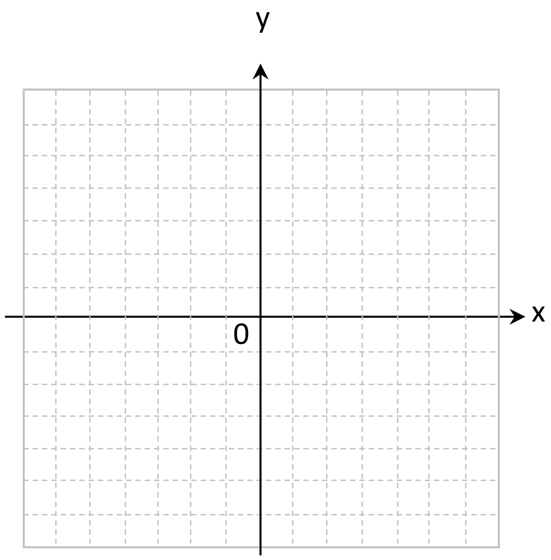
頂點坐標：（０，－２）

對稱軸：$x = 0$

練習 4：$y = x^2 - 4$

解：

x					
y					



開口方向：______________

頂點坐標：______________

對稱軸：________________

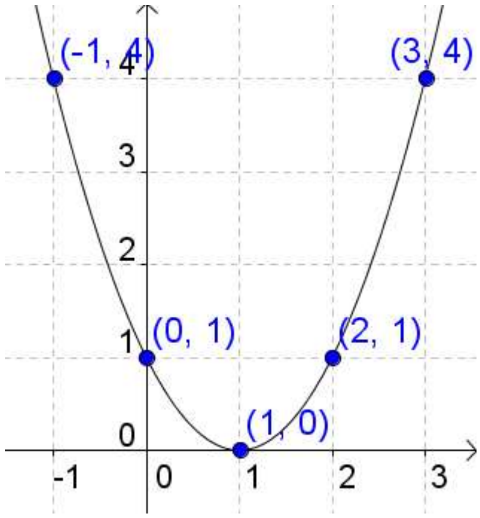
範例 5：$y=(x-1)^2$

解析：

(1)畫出表格，找點坐標。

x	-1	0	1	2	3
y	4	1	0	1	4

(2)再將點描到直角坐標上，以平滑曲線連接。



開口方向：向上

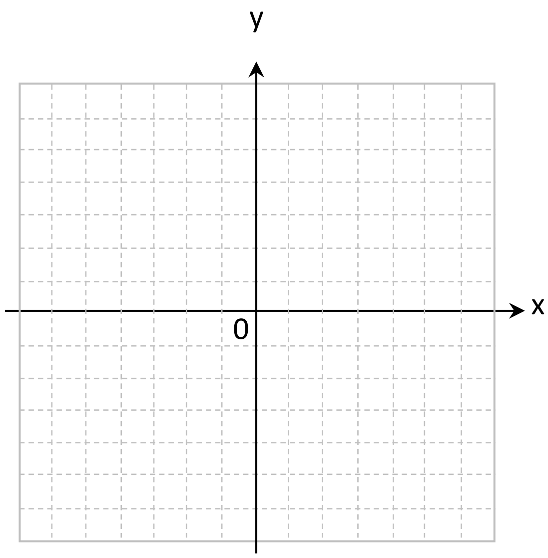
頂點坐標：(1 ， 0)

對稱軸： $x=1$

練習 5：$y=(x-3)^2$

解：

x					
y					



開口方向：__________

頂點坐標：__________

對稱軸：__________

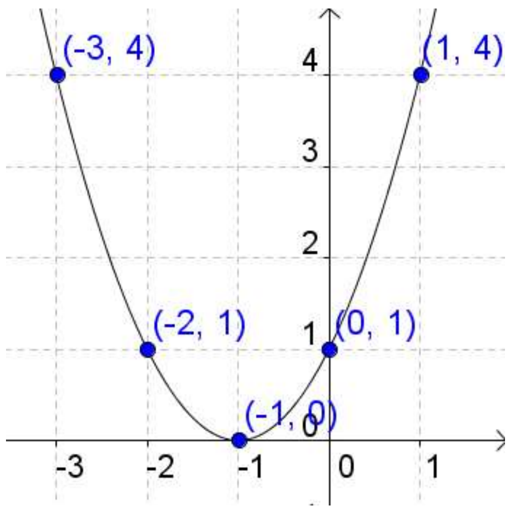
範例 6：$y=(x+1)^2$

解析：

(1)畫一表格，找出點坐標。

x	-3	-2	-1	0	1
y	4	1	0	1	4

(2)再將點描到直角坐標上，並以平滑曲線連接。



開口方向：向上

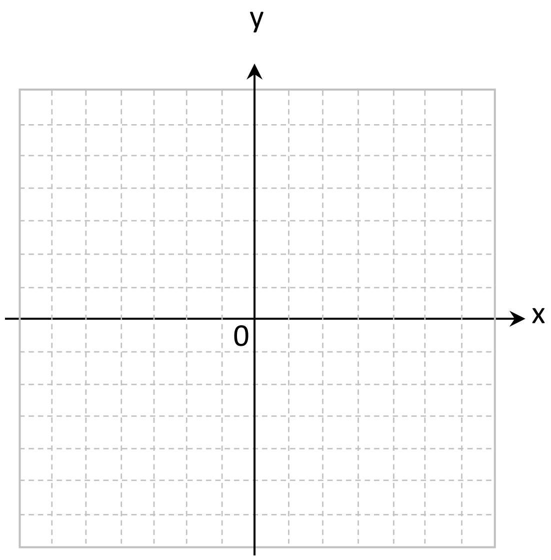
頂點坐標：（－１，０）

對稱軸：$x=-1$

練習 6：$y=(x+2)^2$

解：

x					
y					



開口方向：____________

頂點坐標：____________

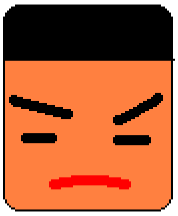
對稱軸：____________

請參考前面的練習題，完成下列表格，並觀察規則：

二次函數	$y=x^2$	$y=2x^2$	$y=-x^2$	$y=-2x^2$
開口方向				
頂點坐標				
對稱軸				
二次函數	$y=x^2+1$	$y=x^2+3$	$y=x^2-2$	$y=x^2-4$
開口方向				
頂點坐標				
對稱軸				
二次函數	$y=(x-1)^2$	$y=(x-3)^2$	$y=(x+1)^2$	$y=(x+2)^2$
開口方向				
頂點坐標				
對稱軸				

3. 二次函數圖形的性質

各位，做完上面的練習後，不知道你有沒有從中歸納出二次函數圖形的性質？



黑木隊長幫大家**重點歸納**如下：

a.二次函數圖形為一拋物線。

b.拋物線左右對稱。

c.拋物線的開否方向與x^2項係數的正負有關：正的開口向上，負的開口向下；對於二次函數$y = a(x - h)^2 + k$而言，我們觀察到：

(1)當 a＞0 時，因為$a(x - h)^2 \geqq 0$，所以函數的值，也就是 y 值，一定不小於 k；且在 x=h 時，y=k；因此(h,k)為拋物線的最低點，且拋物線的開口向上。

(2)當 a＜0 時，因為$a(x - h)^2 \leqq 0$，所以函數的值，也就是 y 值，一定不大於 k，且在 x=h 時，y=k；因此(h,k)為拋物線的最高點，且拋物線的開口向下。

d.拋物線上的最高點或是最低點，我們叫它「頂點」。

e.過頂點畫一條與 x 軸垂直的線，就是拋物線的「對稱軸」。

牛刀小試

請寫出下列二次函數的開口方向、頂點坐標及對稱軸：

	開口方向	頂點坐標	對稱軸
(1) $y = 3(x-4)^2$			
(2) $y = -(x-1)^2 + 2$			
(3) $y = (x-4)^2 - 6$			
(4) $y = (x+3)^2 + 5$			
(5) $y = -7(x+4)^2 - 9$			

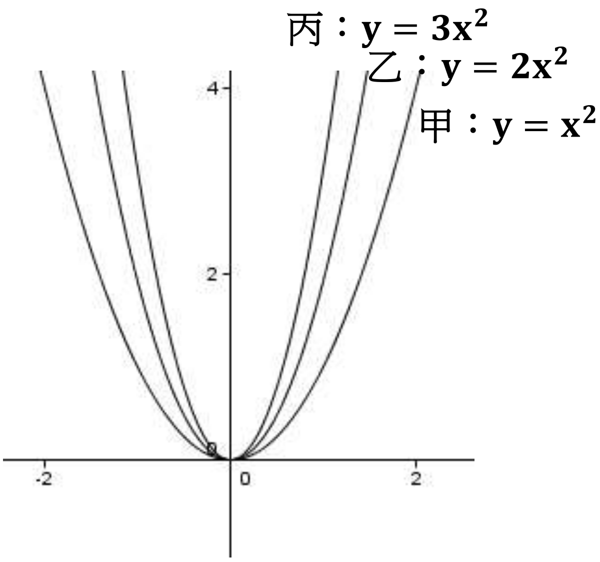
另一方面，x^2項係數絕對值的大小，影響拋物線開口的大小：絕對值越大，開口越小。

範例 1：在同一平面上比較下列二次函數的開口大小：

甲：$y = x^2$，乙：$y = 2x^2$，丙：$y = 3x^2$

解析：

首先，我們依照題意將上述三個二次函數畫在同一直角坐標上。



比較後，發現開口大小的順序為$y = x^2$、$y = 2x^2$、$y = 3x^2$。

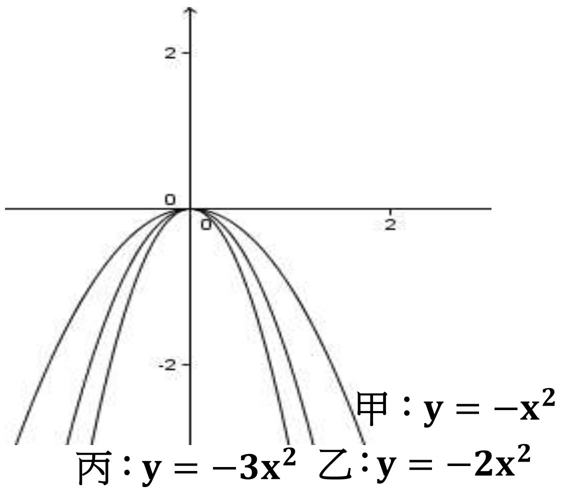
※$|3| > |2| > |1|$，開口大小為甲＞乙＞丙。

範例 2：在同一平面上比較下列二次函數的大小：

甲：$y=-x^2$，乙：$y=-2x^2$，丙：$y=-3x^2$。

解析：

先依照題意將上述三個二次函數畫在直角坐標上。



比較後，發現開口大小的順序為$y=-x^2$、$y=-2x^2$、$y=-3x^2$。

※$|-3|>|-2|>|-1|$，開口大小為甲＞乙＞丙。

牛刀小試

請在同一平面上，利用係數判斷並比較下列二次函數的開口大小：

(1) 甲：$y=x^2$，乙：$y=5x^2$，丙：$y=3x^2$

(2) 甲： $y=-x^2$，乙：$y=-3x^2$，丙：$y=-7x^2$

(3) 甲：$y=-x^2$，乙：$y=2x^2$，丙：$y=-3x^2$

主題三、二次函數的配方法

1. 運用配方法找二次函數的頂點

我們剛剛已經練習了從$y = a(x-h)^2 + k$這樣形式的二次函數式看出拋物線的頂點，那麼，該如何從$y = ax^2 + bx + c$這樣的形式來判斷頂點呢？

頂點如何形成的呢？而我該如何找出頂點？

大猩猩，快告訴我這個天才！！！

隊上的天才球員---英木

首先，只要我們學會將$y = ax^2 + bx + c$轉換成$y = a(x-h)^2 + k$的方法，就能直接看出二次函數的頂點了。

而這樣的方法，我們稱為「配方法」，顧名思義就是將函數配成完全平方式的方法。接下來，讓我們仔細分析配方法的過程吧！

範例 1：請利用配方法找出$y = x^2 + 2x + 1$的頂點。

解析：

$$y = x^2 + 2x$$

$$= (x)^2 + 2 \times x \times 1 + (1)^2$$

$$= (x + 1$$

利用和的平方公式

$\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$

所以，頂點坐標為(-1,0)

練習 1.1：請利用配方法找出$y = x^2 + 4x + 4$的頂點。

解：

練習 1.2：請利用配方法找出$y = x^2 + 6x + 9$的頂點。

解：

範例 2：請利用配方法找出$y = x^2 - 2x + 1$的頂點。

解析：

$$
\begin{aligned}
y &= x^2 - 2x + 1 \\
&= (x)^2 - 2 \times x \times 1 + (1)^2 \\
&= (x-1)^2
\end{aligned}
$$

利用差的平方公式

$\boxed{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$

所以，頂點坐標為(1,0)

練習 2.1：請利用配方法找出$y = x^2 - 4x + 4$的頂點。

解：

練習 2.2：請利用配方法找出$y = x^2 - 6x + 9$的頂點。

解：

範例 3：請利用配方法找出$y = x^2 + 2x + 3$的頂點。

解析：

$y = x^2 + 2x + 3$

$$\Leftarrow \boxed{\begin{aligned} y &= (x^2 + 2x) + 3 \\ &= [(x)^2 + 2 \times x \times 1 \color{red}{+ (1)^2}] + 3 \color{red}{- (1)^2} \end{aligned}}$$

所以，頂點為(-1,2)

練習 3.1：請利用配方法找出$y = x^2 + 4x + 5$的頂點。

解：

練習 3.2：請利用配方法找出$y = x^2 + 6x + 10$的頂點。

解：

範例 4：請利用配方法找出$y = x^2 - 2x + 3$的頂點。

解析：

$y = x^2 - 2x + 3$

$$y = (x^2 - 2x) + 3$$
$$= [(x)^2 - 2 \times x \times 1 + (1)^2] + 3 - (1)^2$$

所以，頂點為(1,2)

練習 4.1：請利用配方法找出$y = x^2 - 4x + 5$的頂點。

解：

練習 4.2：請利用配方法找出$y = x^2 - 6x + 10$的頂點。

解：

範例 5：請利用配方法找出$y = 2x^2 + 8x + 1$的頂點。

解析：

$y = 2x^2 + 8x + 1$

$$\begin{aligned} y &= (2x^2 + 8x) + 1 \\ &= 2(x^2 + 4x) + 1 \\ &= 2(x^2 + 2 \times x \times 2 + 2^2) - 2 \times 2^2 + 1 \end{aligned}$$

所以，頂點坐標為(-2,-7)

練習 5.1：請利用配方法找出$y = 3x^2 + 6x - 4$的頂點。

解：

練習 5.2：請利用配方法找出$y=4x^2+16x-7$的頂點。

解：

範例 6：請利用配方法找出$y=-2x^2+8x+1$的頂點。

解析：

$y=-2x^2+8x+1$

$$\boxed{\begin{aligned} y &= (-2x^2+8x)+1=-2(x^2-4x)+1 \\ &= -2(x^2-2\times x\times 2+2^2)\ \ +2\times 2^2+1 \end{aligned}}$$

所以，頂點坐標為(2,9)

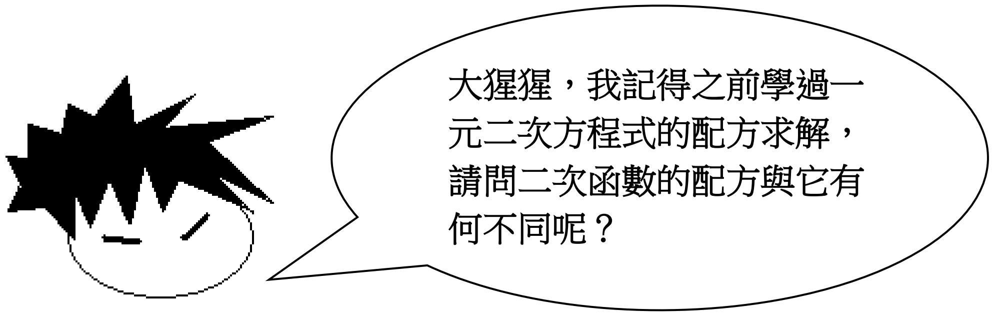
練習 6.1：請利用配方法找出$y=-3x^2+6x-4$的頂點。

解：

練習 6.2：請利用配方法找出$y=-4x^2+16x-7$的頂點。

解：

2. 比較二次函數的配方與一元二次方程式的配方求解



隊上的王牌---劉三風

我們直接看例子來比較吧！

例題 1：請使用配方法求

$x^2+4x-5=0$的解。

解析：

$$x^2+4x=5$$
$$x^2+2\times x\times 2{\color{red}+2^2}=5{\color{red}+2^2}$$
$$(x+2)^2=9$$
$$x+2=\pm 3$$
$$x=1 \text{ 或 } x=-5$$

例題 2：請使用配方法將二次函數$y=x^2+4x-5$配成$y=(x-h)^2+k$的形式。

解析：

$$y=(x^2+4x)-5$$
$$=(x^2+2\times x\times 2+2^2)-5-2^2$$
$$=(x+2)^2-9$$

當$y=0$時，$0=(x+2)^2-9$

則$x=1$ 或 $x=-5$

練習 1.1：請使用配方法求 $x^2-2x-8=0$的解。

解：

練習 2.1：請使用配方法將二次函數 $y=x^2-2x-8$配成$y=(x-h)^2+k$的形式。

解：

練習 1.2：請使用配方法求 $x^2+6x-16=0$的解。

解：

練習 2.2：請使用配方法將二次函數 $y=x^2+6x-16$配成$y=(x-h)^2+k$的形式。

解：

練習 1.3：請使用配方法求 $x^2-8x-9=0$的解。

解：

練習 2.3：請使用配方法將二次函數 $y=x^2-8x-9$配成$y=(x-h)^2+k$的形式。

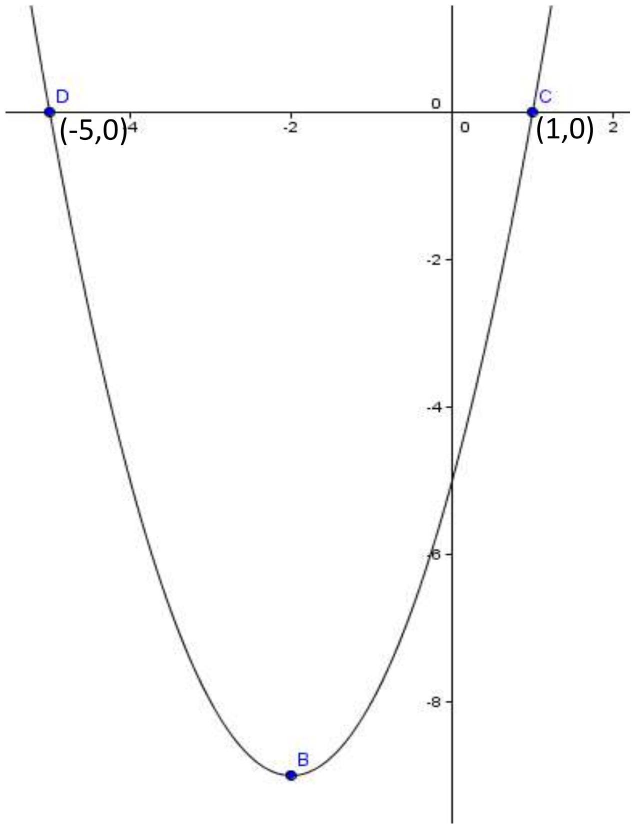
解：

綜合比較：

一元二次方程式為二次函數中欲求$y=0$的x值，也就是一元二次方程式的解。

讓我們用圖形來示意：

$$\mathbf{y=x^2+4x-5}$$

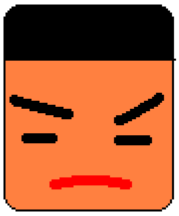


(1,0)和(-5,0)為二次函數$y=x^2+4x-5$與 x 軸的交點。

當代入不同的 x 值會得到相對應的 y 值，這一組一組的點坐標，在直角坐標系上形成二次函數的圖形，而一元二次方程式的解就是，y=0 時等號成立的 x 值。

4. 驗收成果

恭喜你熬過大猩猩的魔鬼訓練！現在要驗收囉！



讓我看看你們的成果吧！這次一定要將海南打到落花流水！

放心吧！大猩猩！湘北國中有我這個天才，一定會贏的！

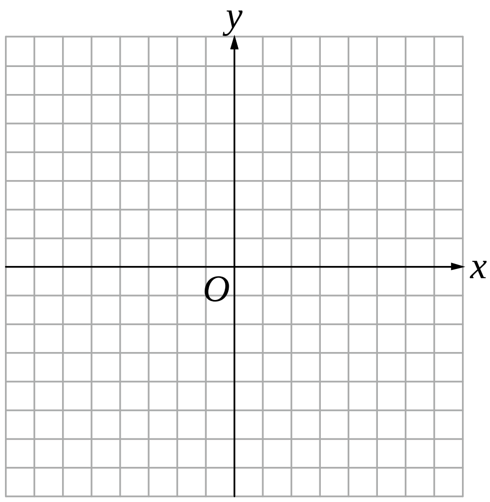
哼！英木你不要光說不練，來一較高下吧！

動動腦：

1.請畫出下列二次函數的圖形：

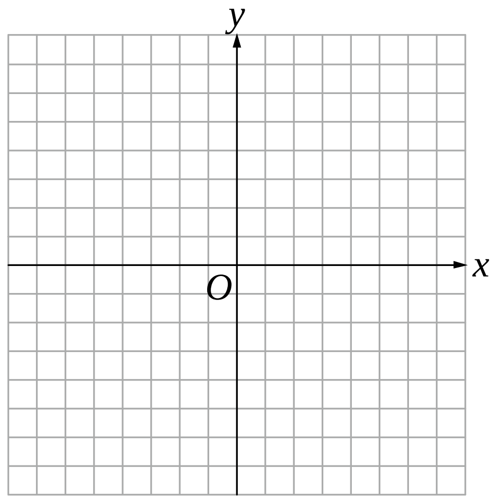
(1) $y = x^2 + 5$

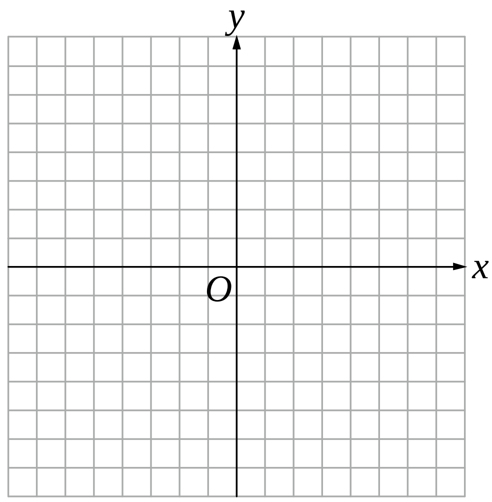
x					
y					



(2) $y=(x-3)^2+2$

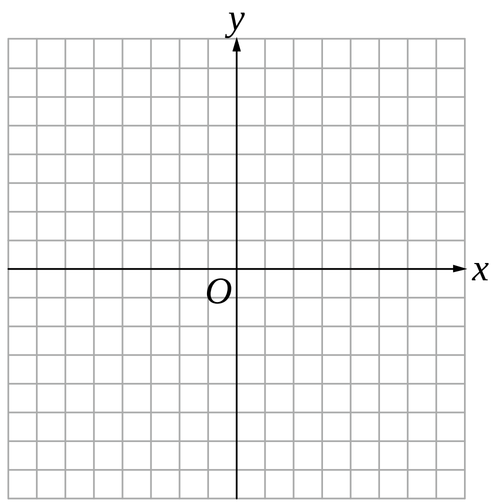
x					
y					





(3) $y=x^2+2x+9$

x					
y					



(4) $y=-x^2+3$

x					
y					

2.請寫出下列二次函數的頂點、開口方向及對稱軸

(1)$y = 2(x+5)^2$

頂點（____，____），開口方向向______，對稱軸：_______________。

(2)$y = -2(x-3)^2$

頂點（____，____），開口方向向______，對稱軸：_______________。

(3)$y = (x-2)^2 + 3$

頂點（____，____），開口方向向______，對稱軸：_______________。

(4)$y = -3(x+1)^2 - 5$

頂點（____，____），開口方向向______，對稱軸：_______________。

(5)$y = x^2 + 12x + 4$

頂點（____，____），開口方向向______，對稱軸：_______________。

(6)$y = -x^2 + 6x + 2$

頂點（____，____），開口方向向______，對稱軸：_______________。

(7)二次函數 $y = 2x^2 - 12x$ 與 x 軸的交點坐標為_______________；

與 y 軸的交點坐標為_________________。

(8)二次函數 $y=-x^2-6x-5$ 與 x 軸的交點坐標為________________；

與 y 軸的交點坐標為____________________。

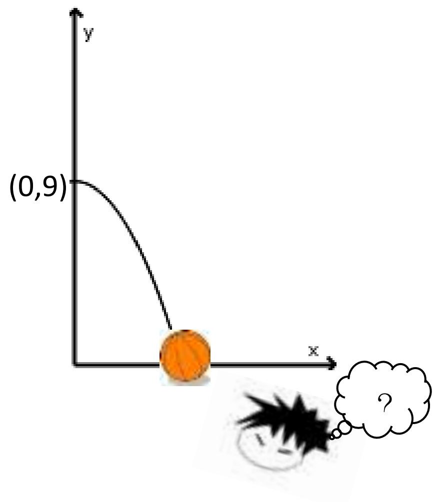
(9)二次函數 $y=4(x+2)^2-9$ 與 x 軸的交點坐標為________________；

與 y 軸的交點坐標為____________________。

(10)二次函數 $y=-(x-3)^2+4$ 與 x 軸的交點坐標為_______________；

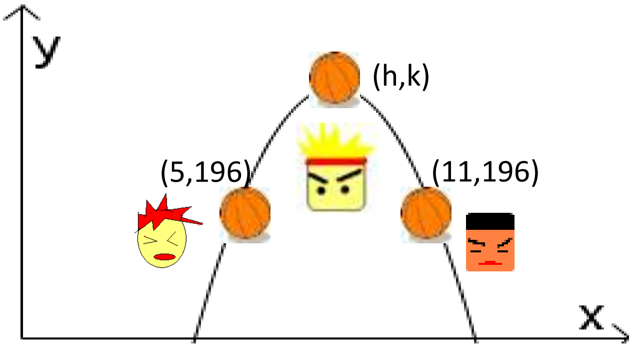
與 y 軸的交點坐標為____________________。

3.如圖，劉三風站在籃球場上，想將球投進籃框裡。若籃球的軌跡為二次函數 $y=-x^2+k$，且籃框座標為（０，９），請問：劉三風投籃時出手的位置坐標為何？



解：

4.下圖是英木、大猩猩與黃頭毛對手的位置，大猩猩想將手中的球傳給較靠近籃框的英木，但高大的對手恰好在英木與大猩猩的中間。已知大猩猩的坐標為（11,196），若將球沿著$y=-6(x-h)^2+k$的軌跡傳出，英木可以在（5,196）的地方接到球，且不會被對手攔截。請求出（h,k）為何？



解：