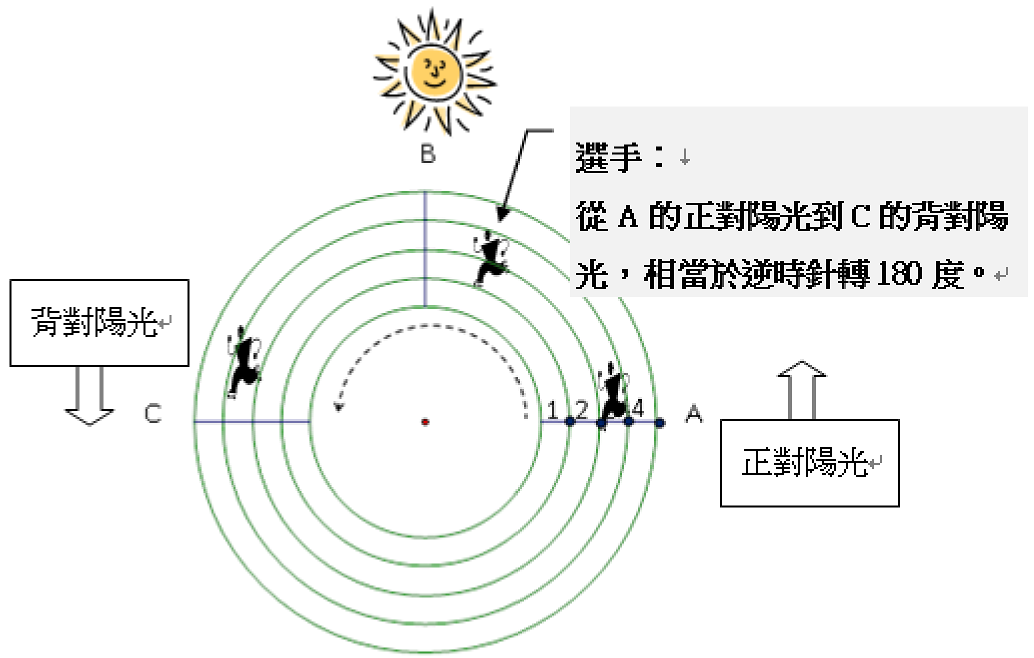
單元四　圓的幾何性質

主題一　圓心角與弧的度數

小岳的發現

小岳是一個喜好運動的國中生，隨時都留意著運動的事。某次，當他看見不同圓形軌道的溜冰選手，在沿著軌道逆時針溜冰時，注意到一件事：在 A 處時，這些選手都會**正對太陽**；到 C 處時，也都會**背對太陽**。發現只要繞著圓走半圈（半圓），就會轉 180 度。心想：在數學上，半圓弧跟 180 度有什麼關係呢！



圓弧是常見的一種圖形，所以我們除了計算弧的長度，同時也規定了**弧的度數**。我們規定**一個圓的度數為 360°**。而

半圓的度數就等於 $360^\circ \times \frac{1}{2} = 180^\circ$。

溫故知新

(1)圓上兩半徑與圓心所構成的角，稱為**圓心角**。如圖，∠AOB。

(2)**大於半圓**的弧稱為**優弧**，如$\overset{\frown}{ADB}$。

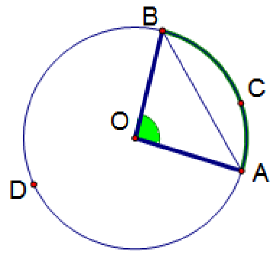
(3)**小於半圓**的弧稱為**劣弧**，如$\overset{\frown}{ACB}$，常簡記為$\overset{\frown}{AB}$。

(4)如果沒有特別說明，$\overset{\frown}{AB}$指的是劣弧 AB。

(5)∠AOB 所對的弧為$\overset{\frown}{AB}$，所對的弦為$\overline{AB}$。

(6) $\overset{\frown}{AB}$與$\overline{AB}$所對的圓心角是∠AOB。

(7)"$\overset{\frown}{AB}$"代表**弧 AB 本身**，也代表弧 AB 的**長度**與**度數**。

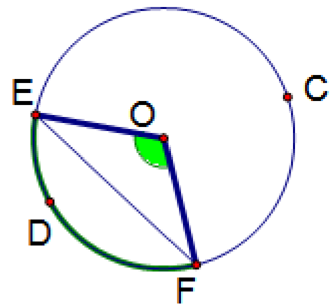


填填看

右圖中，

(1)∠EOF 為圓 O 的一個______角，且∠EOF 所對的弧是______，
∠EOF 所對的弦是______。

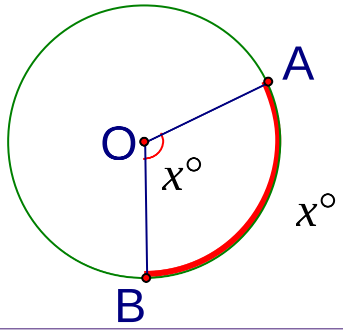
(2) E、F 將圓 O 分為兩個弧，其中
大於半圓的弧是：________，稱為____弧，
小於半圓的弧是：________，稱為____弧。



我們稱**一個圓的度數為 360°**，若將圓周 360 等分，則每一等分即為 1°，所對的圓心角也是 1°。即

圓弧的度數就是它所對圓心角的角度。

如圖，圓 O 中$\overset{\frown}{AB}$的度數等於它所對圓心角∠AOB 的度數，即**∠AOB 是 x°，則$\overset{\frown}{AB}$的度數也是 x°**。



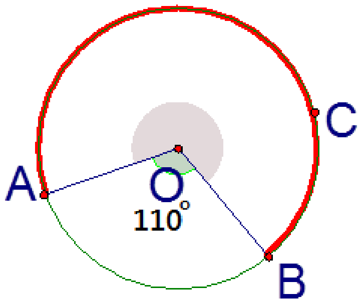
$\overset{\frown}{AB}$的度數＝∠AOB＝x°

小試身手

1. 如圖，圓 O 上 A、B 兩點將圓 O 分成兩個弧，∠AOB＝110°，其中

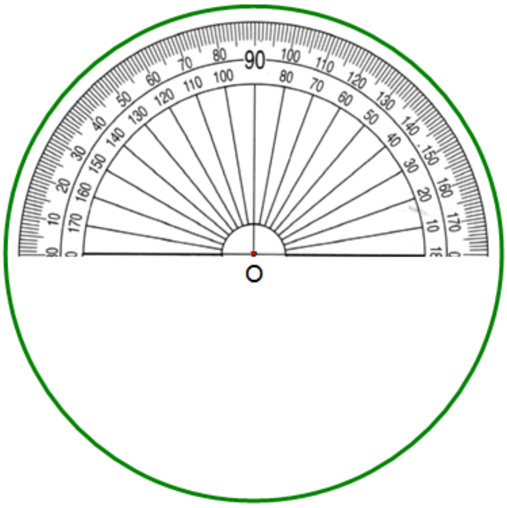
_________是劣弧，其度數等於_______°；

_________是優弧，其度數等於_______°

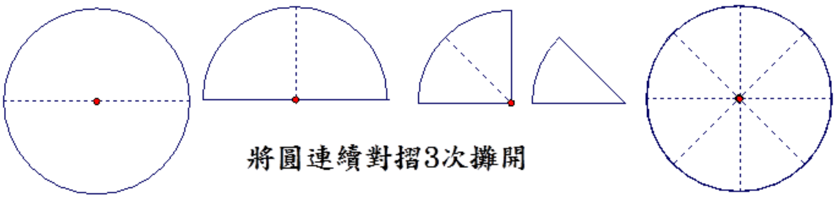


2. 畫一畫

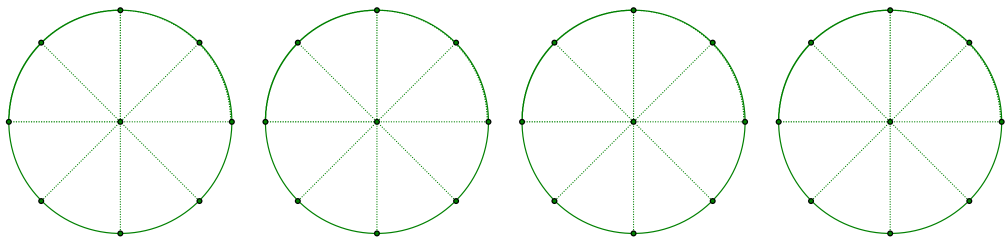
(1) 請利用右圖的量角器，畫一個圓心角∠AOB，使∠AOB＝150°，則$\widehat{AB}$＝_______°。



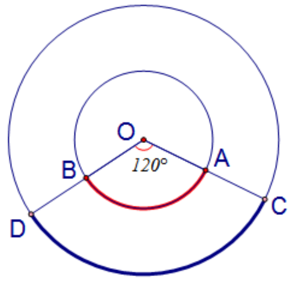
(2) 如圖，將圓連續對摺 3 次攤開，得摺線將圓八等分。請利用摺線，畫出 45°、90°、180° 和 225° 的弧，並標出它所對的圓心角。

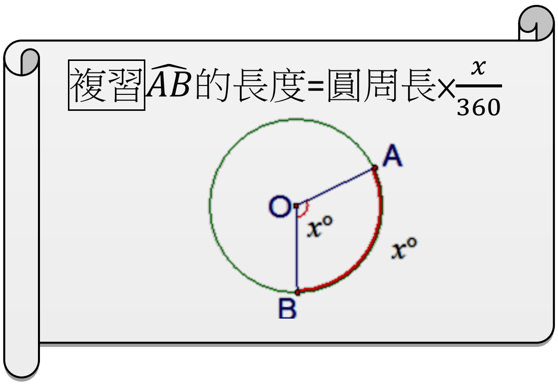


將圓連續對摺3次攤開



3.圖中，兩同心圓的圓心為 O，半徑分別為 3、6，∠COD＝120°，則





(1) $\overset{\frown}{AB}$的度數＝________°，$\overset{\frown}{CD}$的度數＝________°。

(2) $\overset{\frown}{AB}$的長度＝（　　$\times\pi$）$\times \frac{(\quad)}{360}$ ＝（　　），

$\overset{\frown}{CD}$的長度＝（　　$\times\pi$）$\times \frac{(\quad)}{360}$ ＝（　　）。

(3) $\overset{\frown}{AB}$、$\overset{\frown}{CD}$的度數是否相等？

(4) $\overset{\frown}{AB}$、$\overset{\frown}{CD}$的長度是否相等？

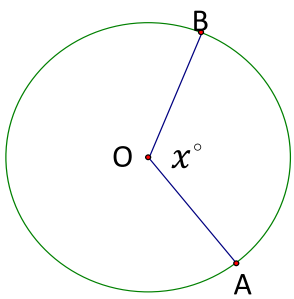
4. 一圓 O 的半徑為 10 公分，A、B 兩點在圓 O 上，∠AOB＝135°，則 $\overset{\frown}{AB}$＝__________°，$\overset{\frown}{AB}$＝__________公分。

5.如右圖，圓 O 的半徑為 12，$\overset{\frown}{AB}$的長為 10π。若∠AOB＝$x°$，則

(1) x 等於多少？(2) $\overset{\frown}{AB}$的度數為多少?

解：(1) 因$\overset{\frown}{AB}$的長度＝圓周長 × $\frac{\overset{\frown}{AB}\text{度數}}{360}$，所以

（　　$\times\pi$）$\times \frac{x}{360} = 10\pi$，

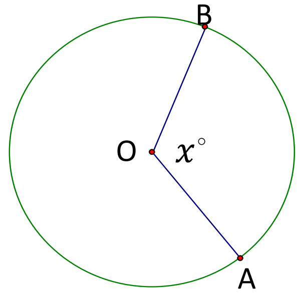


化簡可得x＝

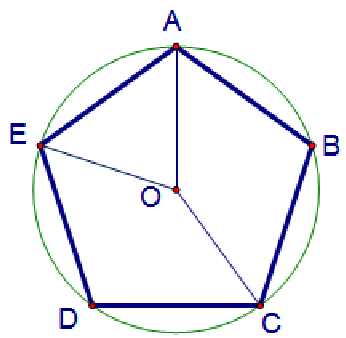
(2) $\overset{\frown}{AB}$的度數＝

6.如右圖，圓 O 的半徑為 15，$\overset{\frown}{AB}$的長為 10π。若∠AOB＝$x°$，則
(1) x 等於多少？(2) $\overset{\frown}{AB}$的度數為多少?

解：

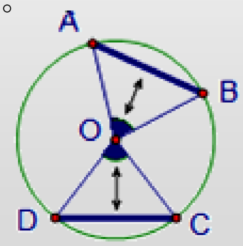


7.右圖，正五邊形 ABCDE 的頂點皆在圓 O 上，並將圓周五等分，則
(1) $\overset{\frown}{AB}$＝______°，$\overset{\frown}{EC}$＝______°，$\overset{\frown}{AEC}$＝______°；
(2)∠AOE＝______°，∠OAE＝______° ∠AOC＝______°。



為什麼正五邊形的頂點會等分圓呢？填填看

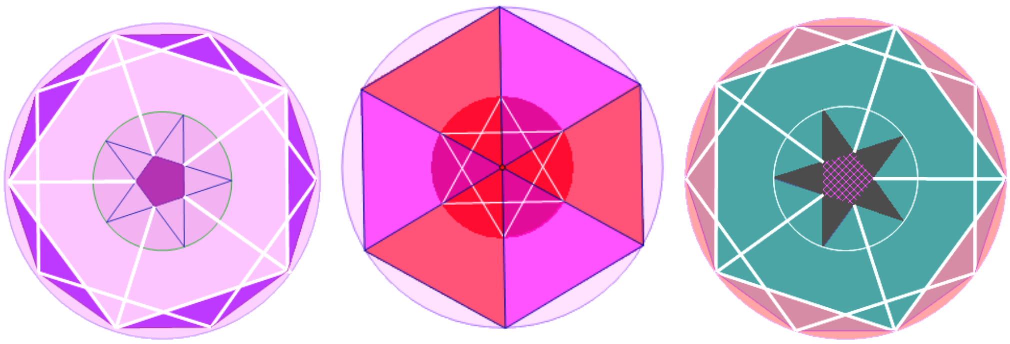
若$\overline{AB}$=$\overline{CD}$，則因半徑相等，可根據________全等性質，
推得△AOB≅△COD，因此∠AOB=∠COD。
圓心角相等，$\overset{\frown}{AB}$的度數＝$\overset{\frown}{CD}$的度數。
在同圓(或等圓)中，等弦對等圓心角。
在同圓(或等圓)中，等弦對等弧。



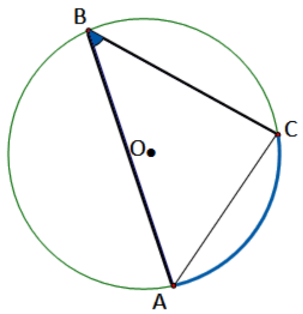
主題二 圓周角

小旻的發現

小旻是小岳的孿生哥哥，喜愛剪貼、拼湊並研究圖形。某次，他仔細觀察下面圖形，有的圖形可以清楚地看到圓心角，另外，有些角的頂點卻在圓周上。心想：頂點在圓心的角稱為圓心角，那頂點在圓周的角一定稱為○○○囉！



當圓的兩弦交點在圓周上，所形成的角稱為**圓周角**。如圖，∠ABC（即∠B）為圓 O 的圓周角，所對的弦是$\overline{AC}$，所對的弧是$\overset{\frown}{AC}$。



填填看

右圖圓 O 中，

(1)$\overset{\frown}{AB}$所對的圓周角是＿＿＿＿＿，

(2)$\overset{\frown}{BC}$所對的圓周角是＿＿＿＿＿，

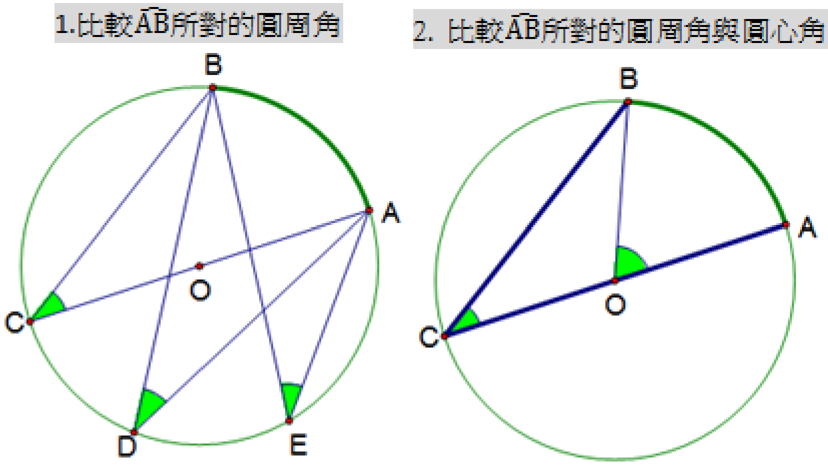
(3)△ABC 的三個內角都是圓 O 的圓周角嗎？
答：＿＿＿＿＿＿

(4)觀察圖中所有圓周角的大小順序與所對弧的大小順序，說說你的發現？

※現在我們就運用小旻的剪貼方式來探索圓周角吧！

動動手動動腦

1. 比較$\overset{\frown}{AB}$所對的圓周角：



(1) 上圖中的∠C、∠D、∠E 都是$\overset{\frown}{AB}$所對的圓周角嗎？答:_______；

(2) 剪下附件$\boxed{∠D}$與圖中的∠C、∠D、∠E 疊合，

請問：∠C、∠D、∠E 有何關係？答：_________；

(3) 在$\overset{\frown}{ADB}$上任取一點 F，畫出∠AFB，它是$\overset{\frown}{AB}$所對的圓周角嗎？

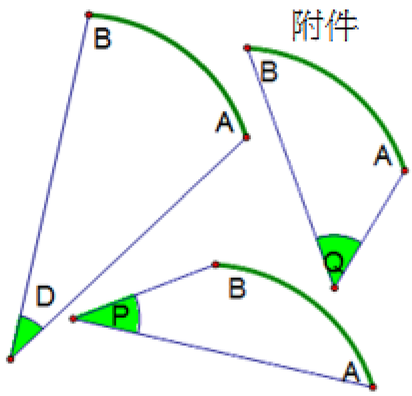
答: _______；∠AFB 與∠C、∠D、∠E 有何關係？答:_______；

(4) $\overset{\frown}{AB}$所對的圓周角是否都相等呢？答：_________。

結論：$\overset{\frown}{AB}$所對的圓周角都相等

$\boxed{考考你}$利用剪下的$\boxed{∠D}$，與未剪下的$\boxed{∠P}$、$\boxed{∠Q}$疊疊看，判斷$\boxed{∠P}$、$\boxed{∠Q}$何者是圓 O 的圓周角？答：_____；再剪下∠P、∠Q 檢驗你是否找對。

答：_____。



2. 比較$\overset{\frown}{AB}$所對的圓周角與圓心角：

(1) 附件中哪兩個角合併等於∠AOB？

(2) $\overset{\frown}{AB}$的圓周角與圓心角有何關係？

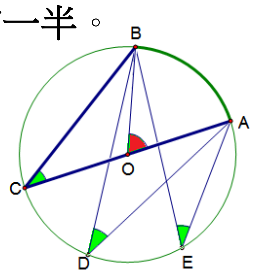
從動動手動動腦中我們發現：

(1) **$\overset{\frown}{AB}$所對的圓周角都相等**，如：∠C＝∠D＝∠E ；

(2) $\overset{\frown}{AB}$所對**圓心角的度數等於**$\overset{\frown}{AB}$所對**圓周角度數的兩倍**，或

$\overset{\frown}{AB}$所對**圓周角的度數等於**$\overset{\frown}{AB}$所對**圓心角度數的一半**。

如：∠AOB＝2∠C，∠D＝$\frac{1}{2}$∠AOB 等。



又弧的度數等於所對圓心角的度數，所以

(3) **$\overset{\frown}{AB}$所對圓周角的度數等於$\overset{\frown}{AB}$度數的一半**。

如圖，設$\overset{\frown}{AB}$所對圓周角∠C＝x°，則$\overset{\frown}{AB}$所對圓心角∠AOB＝$2x^\circ$。

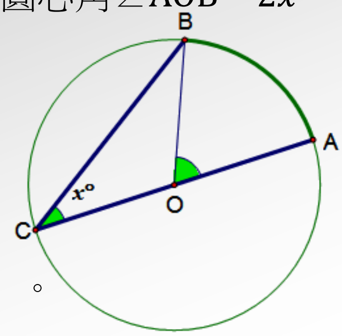
說明：

(1)△BOC 中，因$\overline{OB}$＝______(半徑相等)，

所以∠B=∠C=______° ；

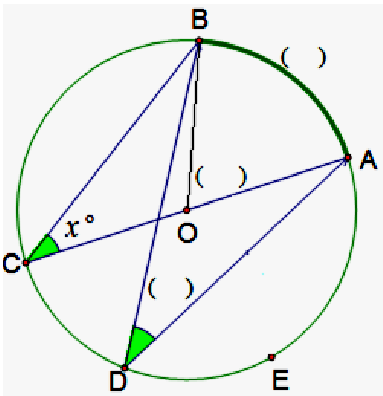
(2)∠AOB 為△BOC 的外角，所以

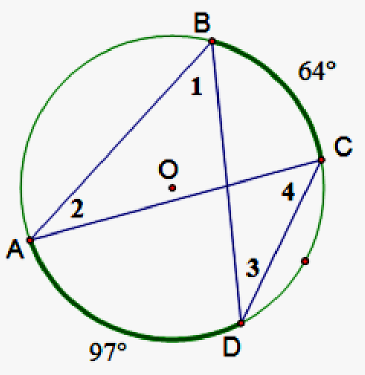
∠AOB＝∠C+______＝x° +______＝$2x^\circ$ 。



1. 在同圓中，同弧所對的圓周角相等。
2. 弧所對圓周角的度數等於它所對圓心角度數的一半。
3. 弧所對圓周角的度數等於該弧度數的一半。

填填看





∠1=______°

∠2=______°

∠3=______°

∠4=______°

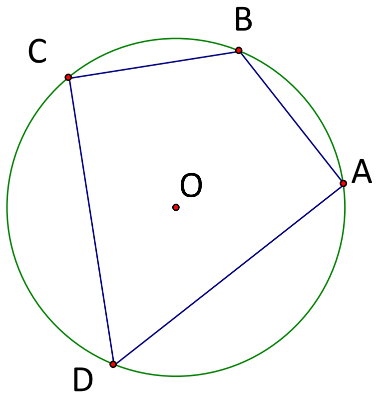
牛刀小試

1.如圖，四邊形 ABCD 的頂點都在圓 O 上，若 $\overset{\frown}{AB}=60^\circ$，$\overset{\frown}{AD}=120^\circ$，則

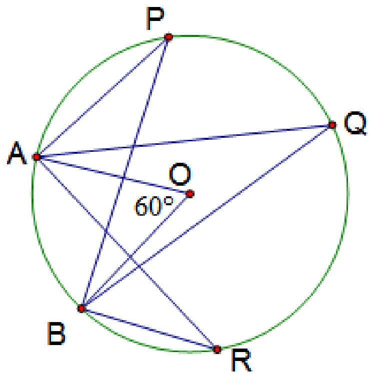
(1) ∠C 等於幾度？

(2) $\overset{\frown}{BCD}$等於幾度？

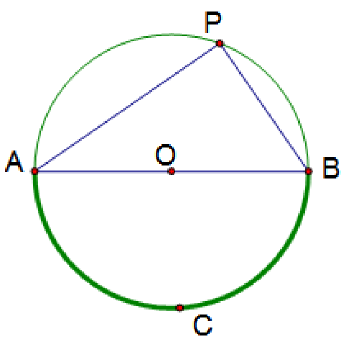
(3)$\overline{BD}$會是圓 O 的直徑嗎？為什麼？



2.右圖，圓 O 中，∠AOB＝60°，P、Q、R 都在圓 O 上，那麼∠P、∠Q、∠R 分別是幾度呢？



3. 如右圖，$\overline{AB}$為直徑，求∠APB 為多少?



解: ∠APB 為圓 O 的______角，

所以 ∠APB＝_____×$\overset{\frown}{ACB}$

又 $\overline{AB}$為直徑，所以$\overset{\frown}{ACB}$＝_______°，

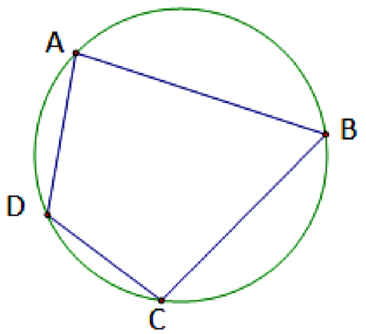
因此∠APB＝$\frac{1}{2}$×______°＝______°

我們發現：

直徑所對的圓周角必為直角。

主題三 圓內接四邊形

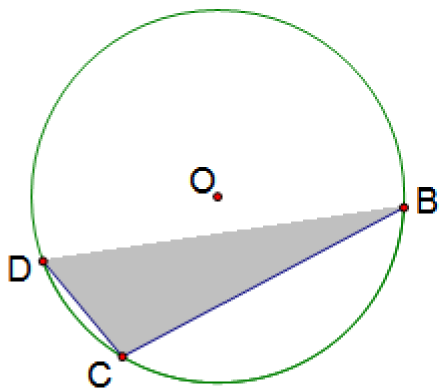
若一個四邊形的頂點都在圓周上，則稱四邊形為**圓內接四邊形**。



左圖中，四邊形 ABCD 的四個頂點都在圓上，我們稱四邊形 ABCD 為＿＿＿＿＿＿。

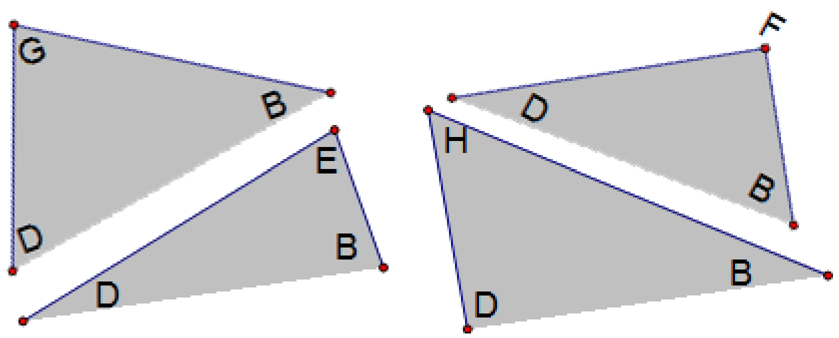
觀察上圖中圓內接四邊形 ABCD 的對角：∠A 與∠C、∠B 與∠D 有何關係呢？

動動手動動腦



1. 找出附件中可以與右圖△BCD 併成圓內接四邊形的三角形。

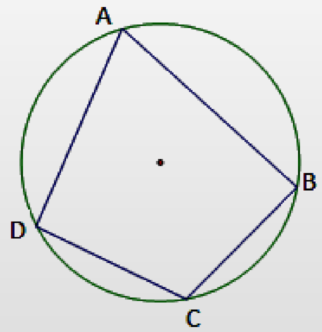
2.併成圓內接四邊形後，找出哪一個角是∠C 的對角，再將∠C 與找出的角合併，結果會怎樣呢？



圓內接四邊形的對角互補

填填看

如圖，四邊形 ABCD 為圓內接四邊形，則
∠A 與∠C 互補，∠B 與∠D 互補。



說明：$\angle A=\frac{1}{2}\times(\overset{\frown}{______}$的度數)，

$\angle C=\frac{1}{2}\times(\overset{\frown}{______}$的度數)，

因此$\angle A+\angle C=\frac{1}{2}\times$（一個圓的度數）

$=\frac{1}{2}\times 360^\circ=$________ $^\circ$

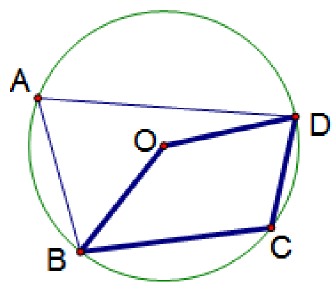
同理，$\angle B+\angle D=$__________ $^\circ$　，

因此∠A 與______互補，∠B 與∠D______ 。

結論

圓內接四邊形的對角互補

填填看



1.右圖中，四邊形__________是圓內接四邊形，

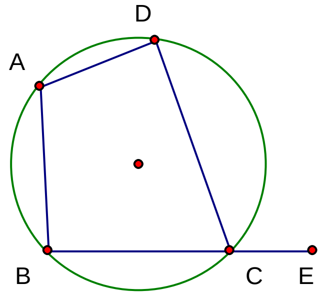
所以______＋$\angle C=180^\circ$。

2. 右圖中，若$\angle C=140^\circ$，則

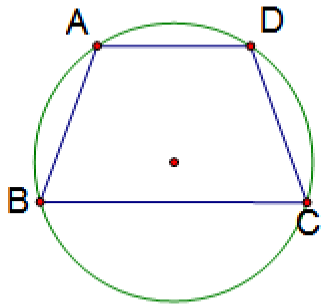
$\angle A=$__________ $^\circ$，$\angle BOD=$__________ $^\circ$。

牛刀小試

1. 如右圖，四邊形 ABCD 為圓內接四邊形，B、C、E 三點共線，若∠ABC=95° ，∠BAD=115° ，則∠ADC 和∠DCE 各為多少度?



2.如右圖，四邊形 ABCD 為圓內接梯形，$\overline{AD}//\overline{BC}$，∠A＝110° ，則:
∠B＝________°，∠C＝_______°，∠D＝_________°。



重點回顧

i 圓心角與弧的度數

a. 弧的度數等於此弧對圓心角的度數。

ii 圓周角

a. 弧所對圓周角的度數等於此弧度數的一半。

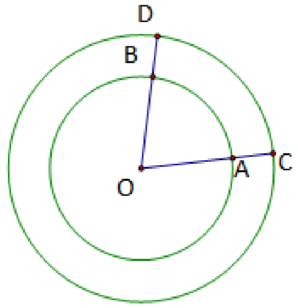
b. 直徑所對的圓周角是直角。

iii 圓內接四邊形

a. 圓內接四邊形對角互補。

主題四　綜合練習

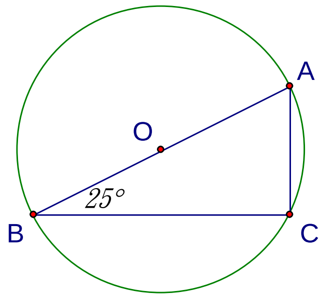
1.如右圖兩同心圓的圓心為 O，且兩圓半徑為 8、12，$\widehat{CD}$的度數＝80°　。則



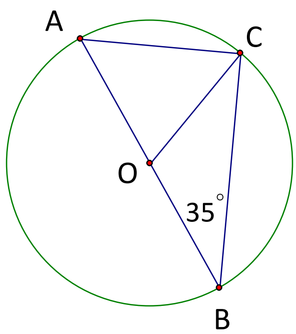
(1)　$\widehat{AB}$是幾度？

(2)　$\widehat{AB}$有多長?

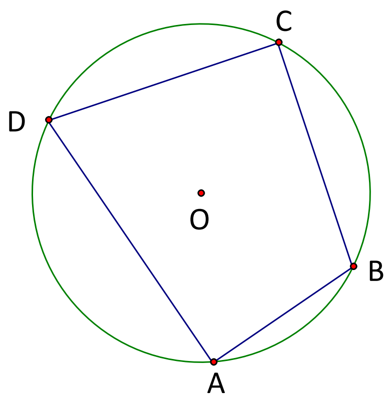
2.如圖，$\overline{AB}$為圓 O 的直徑，C 在圓 O 上，且∠B＝25°，則∠C＝______°，∠A＝______°，$\widehat{BC}$＝ ______ 。



3.如圖，$\overline{AB}$為圓 O 的直徑，C 在圓 O 上，且∠B＝35°，則∠AOC 幾度？



4.如圖，四邊形 ABCD 的頂點都在圓 O 上，$\widehat{AB}$＝60°，∠C＝90°，則

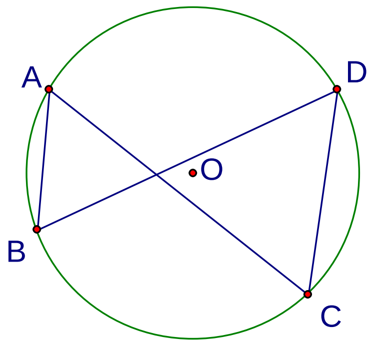


(1) $\widehat{AD}$幾度？

(2) ∠A 幾度？

5. 如圖，A、B、C、D都在圓O上，若$\overset{\frown}{BC}$＝110°，∠C＝65°，則

(1)∠A、∠B、∠D各是幾度？

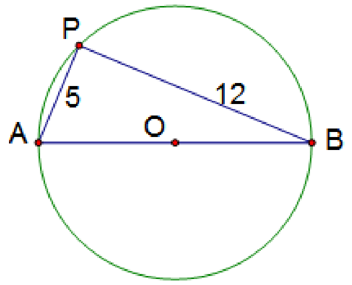


(2)$\overset{\frown}{AD}$是幾度？

6. 如圖，$\overline{AB}$是圓O的直徑，$\overline{AP}$＝5，$\overline{BP}$＝12，則

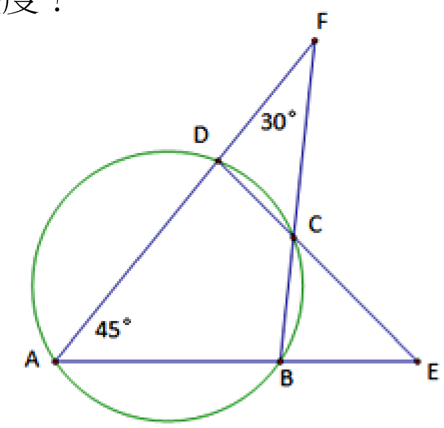
(1) ∠P是幾度？

(2) 圓O的面積是多少？



7. 如圖，四邊形 ABCD 為圓內接四邊形，E 為 $\overline{AB}$、$\overline{CD}$延長線的交點；F 為$\overline{AD}$、$\overline{BC}$延長線的交點，若∠A=45°，∠F=30°，求:

(1) 四邊形 ABCD 中，∠A 的對角∠DCB 是幾度？



(2) △ABF 的外角∠CBE 是幾度？

(3) ∠E 是幾度？

三角形外角定理：

∠BCD=∠A+∠B