

主題二 平行四邊形的判別

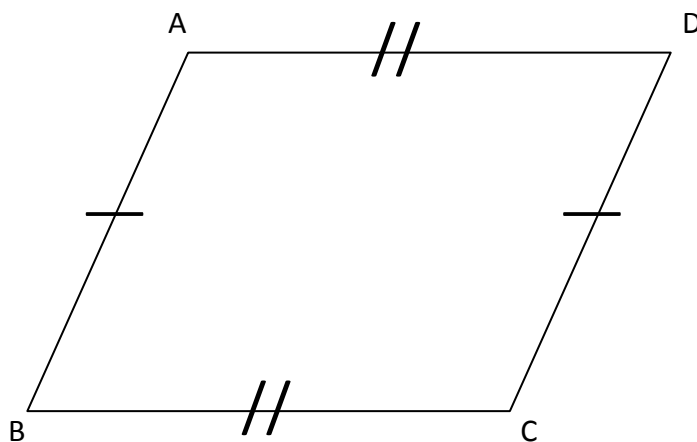
如何判別一個四邊形是否為平行四邊形呢？

除了基本定義為「兩組對邊平行」的判定方法之外，還有沒有其他方法可以選擇呢？以下介紹另外四種判別方法：

(一) 兩組對邊分別相等的四邊形，必為平行四邊形。

如下圖， $\overline{AB} = \overline{CD}$ ， $\overline{AD} = \overline{BC}$ (如記號「—」及「//」所示)，如何確定四邊形 ABCD 必為平行四邊形呢？請同學跟著下列步驟進行驗證。

- (1) 連 \overline{AC} ，並將 \overline{AC} 畫上「///」記號。
- (2) $\triangle ABC$ 和 $\triangle CDA$ 可根據_____性質全等。
- (3) 請用 3 種不同顏色的筆，將這兩個全等三角形的每一組對應角分別畫上相同顏色，同色代表同一組相等的對應角。(請老師指導！)
- (4) 請尋找一組相等的內錯角，使 $\overline{AD} // \overline{BC}$ 。答：_____色角。
再尋找一組相等的內錯角，使 $\overline{AB} // \overline{CD}$ 。答：_____色角。
- (5) 由(4)知： $\overline{AD} // \overline{BC}$ 且 $\overline{AB} // \overline{CD}$ ，因此四邊形 ABCD 為平行四邊形。



(二) 兩組對角分別相等的四邊形，必為平行四邊形。

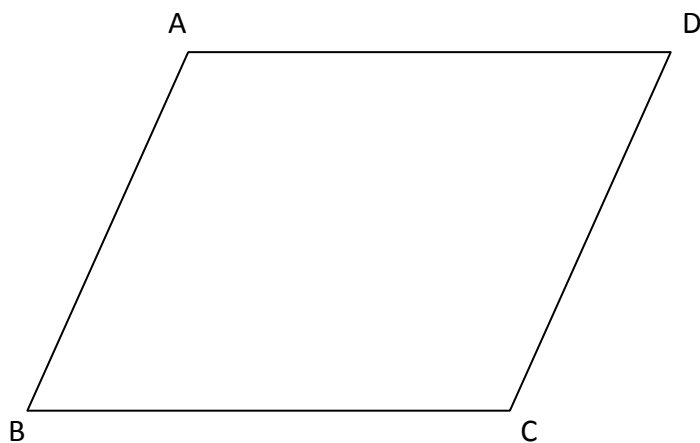
如下圖， $\angle A = \angle C$ ， $\angle B = \angle D$ ，如何確定四邊形 ABCD 必為平行四邊形呢？請同學跟著下列步驟進行驗證。

- (1) $\because \angle A = \angle C$ ，在圖上 $\angle A$ 和 $\angle C$ 內部寫上「 x° 」。
- (2) $\because \angle B = \angle D$ ，在圖上 $\angle B$ 和 $\angle D$ 內部寫上「 y° 」。
- (3) 由四邊形內角和為 360° ，可列出： $x^\circ + y^\circ + x^\circ + y^\circ = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$
 $\therefore 2x^\circ + 2y^\circ = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$
 $\therefore x^\circ + y^\circ = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$

(4) 看圖尋找一組互補的同側內角，使 $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ 。答： $\angle \underline{\hspace{1cm}}$ 和 $\angle \underline{\hspace{1cm}}$ 。

看圖尋找一組互補的同側內角，使 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ 。答： $\angle \underline{\hspace{1cm}}$ 和 $\angle \underline{\hspace{1cm}}$ 。

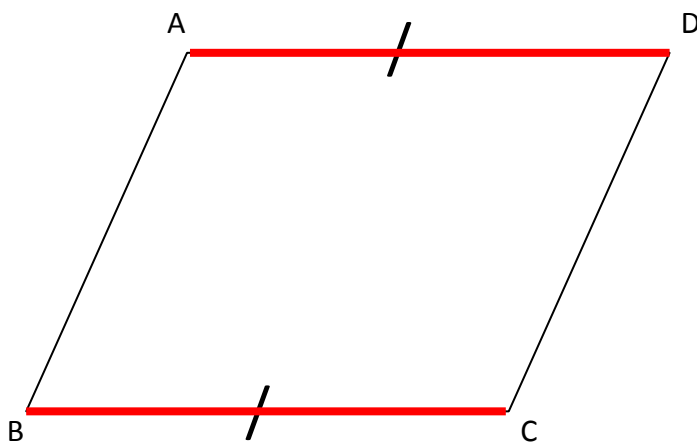
(5) 由(4)知： $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ 且 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ，因此四邊形 ABCD 為平行四邊形。



(三) 一組對邊平行且相等的四邊形，必為平行四邊形。

如下圖， $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ 且 $\overline{AD} = \overline{BC}$ (如記號「/」)，如何確定四邊形 ABCD 必為平行四邊形呢？請同學跟著下列步驟進行驗證。

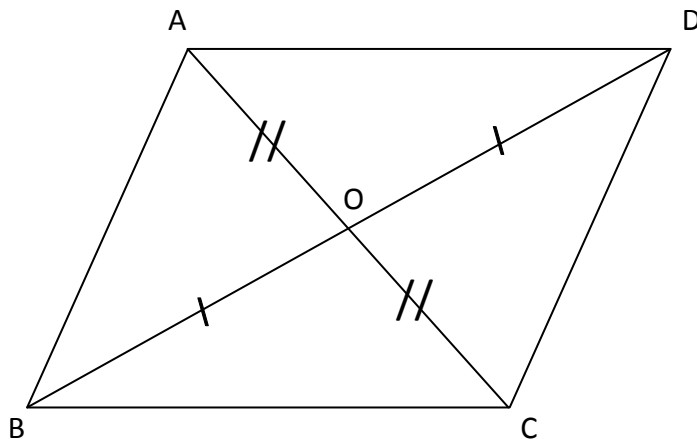
- (1) 連 \overline{AC} ，並將 \overline{AC} 畫上「//」記號。
- (2) 由 $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ 知內錯角相等，請在 $\angle DAC$ 和 $\angle BCA$ 內部寫上「 x° 」。
- (3) $\triangle ABC$ 和 $\triangle CDA$ 可根據_____性質全等。
- (4) 請用 2 種不同顏色的筆，將這兩個全等三角形的另 2 組對應角(x° 角除外)分別畫上相同顏色，同色代表同一組相等的對應角。(請老師指導！)
- (5) 請尋找一組相等的內錯角，使 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ 。答：_____色角。
- (6) 已知 $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ，又由(5)知 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ， \therefore 四邊形 ABCD 為平行四邊形。



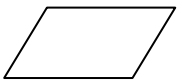
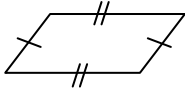
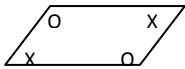
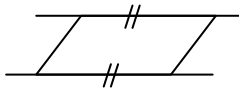
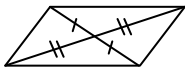
(四)對角線互相平分的四邊形，必為平行四邊形。

如下圖， $\overline{AO} = \overline{CO}$ 且 $\overline{BO} = \overline{DO}$ (如記號「//」及「\」所示)，如何確定四邊形 ABCD 必為平行四邊形呢？請同學跟著下列步驟進行驗證。

- (1) $\angle AOB$ 與 $\angle COD$ 為對頂角，一定相等。請在 $\angle AOB$ 和 $\angle COD$ 內部寫上「 x° 」。
- (2) $\triangle AOB$ 和 $\triangle COD$ 可根據_____性質全等。
- (3) 將這兩個全等三角形的另 2 組對應角(x° 角除外)分別畫上相同顏色，同色代表同一組相等的對應角。(請老師指導！)
- (4) 請尋找一組相等的內錯角，使 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ 。答：_____色角。
- (5) 同樣方法可得 $\triangle AOD$ 和 $\triangle COB$ 全等，仿照(3)(4)可得_____//_____。
- (6) 由(4)(5)知： $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ 且 $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ，因此四邊形 ABCD 為平行四邊形。



綜合平行四邊形的基本定義與上述四種判別方法，整理成以下結論：

| | |
|---------------|--|
| 平行四邊形的判別方法： | |
| 0. 兩組對邊平行(定義) |  |
| ----- | |
| 1. 兩組對邊分別相等。 |  |
| 2. 兩組對角分別相等。 |  |
| 3. 一組對邊平行且相等。 |  |
| 4. 對角線互相平分。 |  |

同學們務必熟記平行四邊形的定義及這四種判別方法，接著我們來看一些例題。

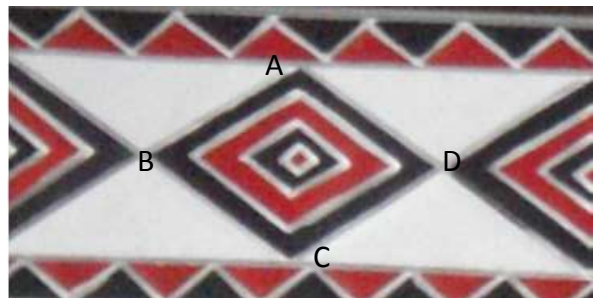
例 4：(1) 禦寒的圍巾有很精緻的圖案設計，請用直尺量出各線段長度。

$$\overline{AB} = \underline{\hspace{2cm}} \text{公分，}$$

$$\overline{BC} = \underline{\hspace{2cm}} \text{公分，}$$

$$\overline{CD} = \underline{\hspace{2cm}} \text{公分，}$$

$$\overline{AD} = \underline{\hspace{2cm}} \text{公分}$$



(2) 由(1)的結果，請問四邊形 ABCD 是平行四邊形嗎？答：_____

你是根據哪一個判別方法？ 答：_____

答：(1)略 (2)是，兩組對邊相等

例 5：如圖，清晨陽光照在窗櫺上，投射出美麗的影子，趕緊用相機拍下。

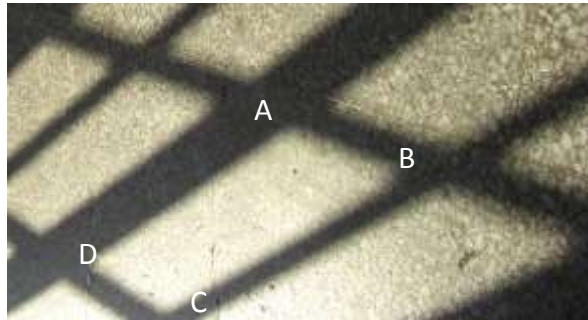
(1)請用量角器量出各角的度數。

$\angle A =$ _____ 度，

$\angle B =$ _____ 度，

$\angle C =$ _____ 度，

$\angle D =$ _____ 度

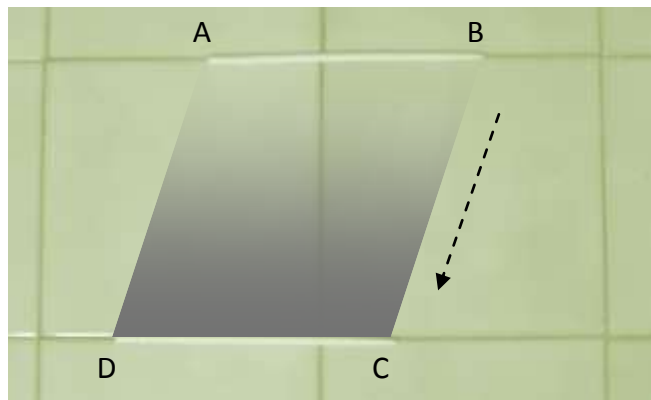


(2) 由(1)的結果，請問四邊形 ABCD 是平行四邊形嗎？答：_____

你是根據哪一個判別方法？ 答：_____

答：(1)略 (2)不是，因不符合平行四邊形性質的對角相等，因此不是平行四邊形。

例 6：如圖，在舖蓋正方形磁磚的地面上，掉落一支竹筴，竹筴從 \overline{AB} 的位置循箭頭方向滾到 \overline{CD} 的位置，其中 \overline{AB} 、 \overline{CD} 都貼在磁磚的邊緣上。請問：



(1) 四邊形 ABCD 是平行四邊形嗎？答：_____

(2) 你是根據哪一個判別方法？ 答：_____

答：(1)是 (2)一組對邊平行且相等

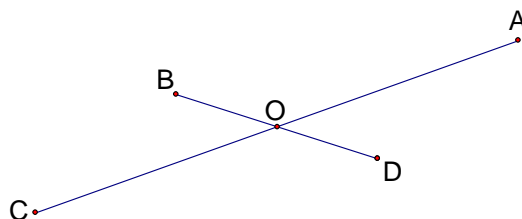
例 7：如圖， \overline{AC} 和 \overline{BD} 交於 O 點。(1) 請用直尺量出下列各線段的長度：

$\overline{OA} =$ _____ 公分，

$\overline{OB} =$ _____ 公分，

$\overline{OC} =$ _____ 公分，

$\overline{OD} =$ _____ 公分



(2) 拿起尺和筆來，連接 \overline{AB} 、 \overline{BC} 、 \overline{CD} 、 \overline{AD} 。

(3) 四邊形 ABCD 是平行四邊形嗎？答：_____

(4) 你是根據哪一個判別方法？ 答：_____

答：(1)、(2)略。(3)是 (4)對角線互相平分

例 8：當四邊形 ABCD 符合下列哪些敘述時，ABCD 必定為平行四邊形？

(1) \overline{AB} 、 \overline{BC} 、 \overline{CD} 、 \overline{AD} 的長依序為 3、2、3、2

(2) \overline{AB} 、 \overline{BC} 、 \overline{CD} 、 \overline{AD} 的長依序為 2、2、3、3

(3) $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 、 $\angle D$ 的角度依序為 80° 、 100° 、 80° 、 100°

(4) $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 、 $\angle D$ 的角度依序為 90° 、 90° 、 90° 、 90°

(5) $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 、 $\angle D$ 的角度依序為 70° 、 70° 、 110° 、 110°

答：(1)(3)(4)

例 9：要判別一個四邊形是否為平行四邊形，除了用定義「兩組對邊互相平行」之外，請寫出其他判別方法：

(1) _____

(2) _____

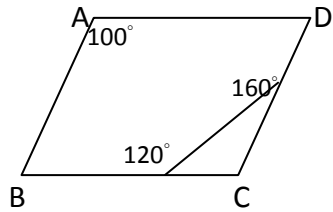
(3) _____

(4) _____

答：(1) 兩組對邊相等 (2)兩組對角相等 (3)一組對邊平行且相等 (4)對角線互相平分

例 10：下列四邊形 ABCD 是否為平行四邊形？若是，在括弧內寫下判別方法。

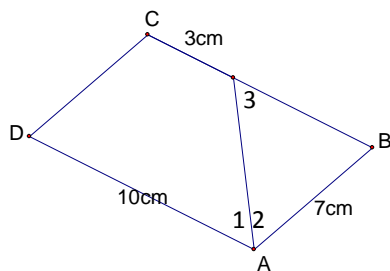
(1) $\angle B = \angle D$



答：_____

(_____)

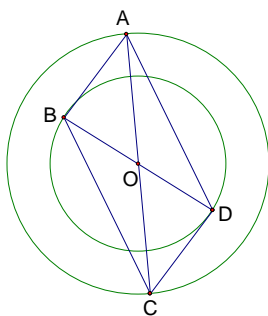
(2) $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$



答：_____

(_____)

(3) \overline{AC} 、 \overline{BD} 分別為兩同心圓(圓心 O)的直徑



答：_____

(_____)

答：(1)是(兩組對角相等) (2) 是(一組對邊平行且相等) (3) 是(對角線互相平分)