單元七　三角形的全等性質

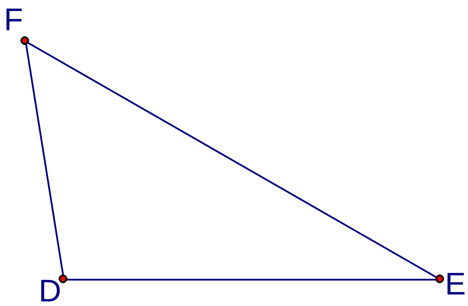
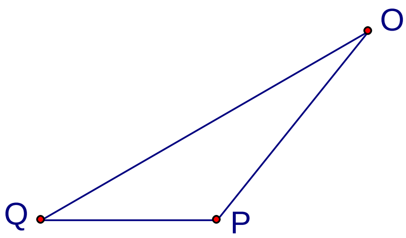
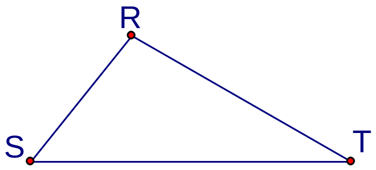
主題一　三角形全等的意義

走在路上，當你看到一對雙胞胎的時候，大家都會說：「哇~你們長得一模一樣，真的好像啊！」究竟是什麼樣的原因，我們會說他們長得好像呢？長得一模一樣呢？

如果是在幾何的世界裡，我們又會怎麼去說兩個圖形一模一樣呢？現在我們就從圖形中的三角形看起吧！

活動 1：完全疊合的圖形

剪下附件的△ABC，試著與下列三角形的邊、角做疊合，找出它們相等的邊，相等的角，並記錄下來。

	相等的邊： $\overline{AB}=\overline{DE}$	相等的角： $\angle A=\angle D$
	相等的邊：	相等的角：
	相等的邊：	相等的角：

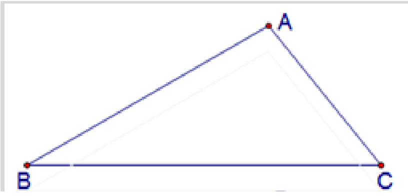
請根據你的記錄回答下列問題：

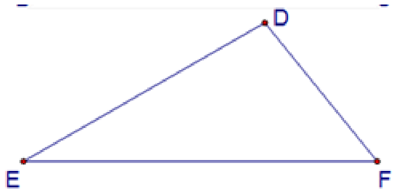
(1) 何者可與△ABC 完全疊合？頂點與頂點如何疊合？

(2) 何者與△ABC 的兩個邊與一個角相等，但不能完全疊合？

(3) 何者與△ABC 的內角都相等，但邊長不相等，不能完全疊合？

如果兩個圖形經過翻轉或移動後可以完全疊合，我們稱這兩個圖形**全等**。疊合在一起的頂點稱為**對應頂點**，疊合在一起的邊稱為**對應邊**，疊合在一起的角稱為**對應角**。因此，**兩個全等圖形的對應邊相等，對應角相等。**





「活動一」中，△ABC 與△DEF 可以完全疊合，所以△ABC 與△DEF 全等，記為Δ **ABC ≅ ΔDEF**，讀作「ΔABC全等於ΔDEF」。而 A 和 D、B 和 E、C 和 F 是對應頂點，且

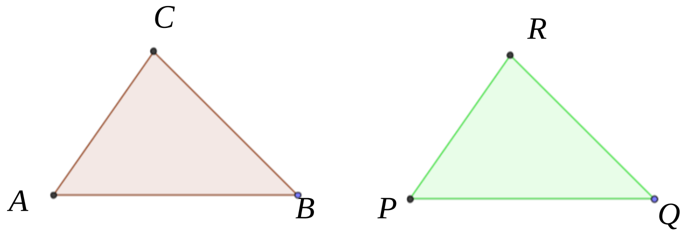
(1)對應邊相等：$\overline{AB}=\overline{DE}$ 、$\overline{BC}=\overline{EF}$ 、$\overline{CA}=\overline{FD}$ ；

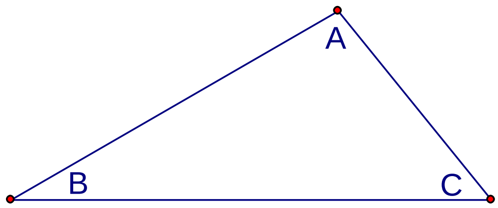
(2)對應角相等：$\angle A=\angle D$ 、$\angle B=\angle E$ 、$\angle C=\angle F$ 。

反之，若兩個三角形的對應邊相等，且對應角相等，那麼這兩個三角形的形狀、大小都相同，因此可以完全疊合，所以全等。即**當兩個三角形的對應邊相等，且對應角也相等時，這兩個三角形全等。**

小試身手：

如下圖 $\Delta ABC\cong\Delta PQR$ ，其中 A 與 P 、 B 與 Q 、 C 與 R 為對應點，已知 $\angle A=55°$ 、 $\angle B=45°$ ，求 $\angle P,\angle Q,\angle R$ 分別為多少度？





主題二　三角形的全等性質(一)

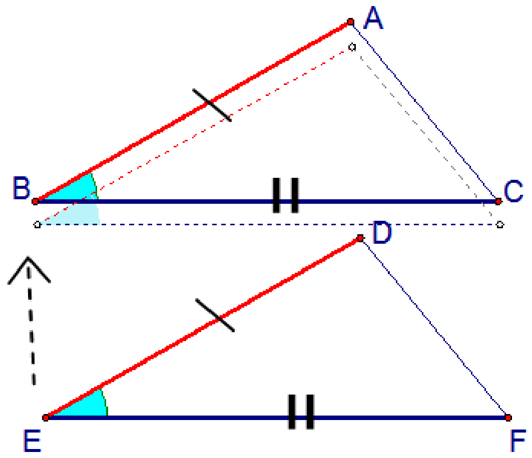
福爾摩斯是個非常有名的偵探，他第一次認識華生醫生時，在尚無任何交談之前，就說出「你到過阿富汗。」而在之後的許多案件中，也經常在與顧客接觸的第一瞬間，就能將這個顧客的底細全部說出，讓他的顧客大吃一驚。到底他是怎麼辦到的呢？*難道他憑著一些看得到的細節，就能推斷出所有的結果嗎？*

其實兩個三角形全等的判定，並不需要知道“全部的對應邊、全部的對應角都相等”後才能判定。只要知道其中的幾組邊或幾組角對應相等，我們就可以說兩個三角形全等。*現在我們就來效仿偵探的精神，探討活動 1 中的一些細節。*

為了方便討論，兩個三角形中，我們用「S」表示有一組**邊對應相等**，用「A」表示有一組**角對應相等**。而 S 和 A 的排列，表示這些對應相等的邊角的位置關係。例如：SSS 代表有三組邊對應相等；SAS 代表有兩組邊和一組角對應相等，且這組等角是這兩組等邊的夾角，以此類推。

例如，

若依照下列步驟，將活動 1 的△ABC 與△DEF 疊合會發現什麼呢？



(1)因$\angle B=\angle E$，所以 B 和 E 重合後，∠B 和∠E 的兩邊會重疊在一起；

(2)因$\overline{AB}=\overline{DE}$，所以$\overline{AB}$和$\overline{DE}$疊合時，A 和 D 會重合；

(3)因$\overline{BC}=\overline{EF}$，所$\overline{BC}$和$\overline{EF}$疊合時，C 和 F 會重合；

此時這兩個三角形已經成功的完全疊合在一起。也就是說，

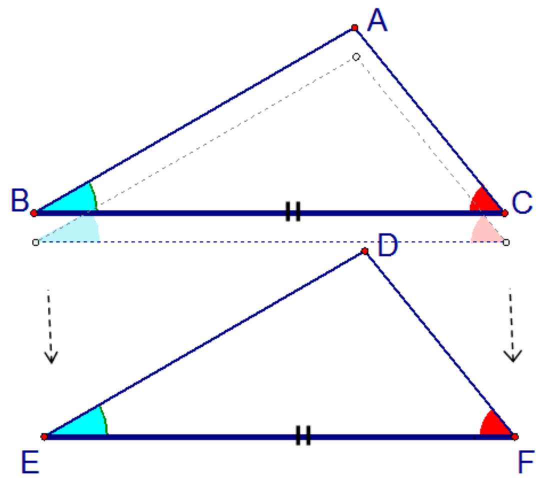
當兩個三角形的兩邊及它們的夾角分別對應相等，則這兩個三角形就會全等，這個性質稱為 SAS 全等性質。

註：SAS 的 A 寫在兩個 S 之間，代表角被兩邊夾住（夾角）！

小試身手：
△ABC 與△DEF 中，
若$\angle A=30°, \overline{AB}=4, \overline{AC}=5$ ，$\angle D=30°, \overline{DE}=4, \overline{DF}=5$ ，
則這兩個三角形符合＿＿＿＿＿＿全等性質，所以全等。

活動 2：**發現 ASA 全等性質**

請依照下列的步驟，將活動 1 的△ABC 與△DEF 疊合。



(1) 因 $\overline{BC}=\overline{EF}$ ，那麼 $\overline{BC}$ 和 $\overline{EF}$ 疊合時，B 和 E、C 和 F 是否可重合？

(2) 因 $\angle B=\angle E$ 、那麼∠B 和∠E 的兩邊是否重疊？

(3) 因 $\angle C=\angle F$ 、那麼∠C 和∠F 的兩邊是否重疊？

(4) **此時，A 和 D 是否重合？**兩個三角形是否已經完全疊合？

當兩個三角形的兩角及它們的夾邊分別對應相等，則這兩個三角形就會全等，這個性質稱為 ASA 全等性質。

註：ASA 的 S 寫在兩個 A 之間，代表邊被兩角夾住（夾邊）！

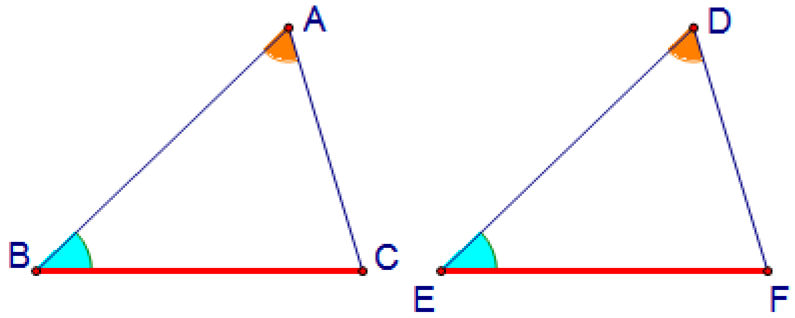
小試身手：△ABC 與△DEF 中，

若 $\angle A=30°, \angle B=45°, \overline{AB}=5$ ， $\angle D=30°, \angle E=45°, \overline{DE}=5$ ，

則這兩個三角形符合____________全等性質，所以全等。

活動 3：**發現 AAS 全等性質**

如圖，在△ABC 與△DEF 中，$\angle A=\angle D$，$\angle B=\angle E$，$\overline{BC}=\overline{EF}$，則△ABC 與△DEF 是否全等呢？說說看



（1）三角形的內角和都是幾度？

（2）△ABC 與△DEF 中，$\angle A=\angle D$，$\angle B=\angle E$，那麼∠C 和∠F 相等嗎？

（3）試著找出兩組相等的對應角及一組對應邊，並利用 ASA 全等性質說明△ABC 與△DEF 全等。

答：∠＿＝∠＿＿，∠＿＝∠＿＿，＿＿＿＿＝＿＿＿＿。

活動 3 的△ABC 與△DEF 中，原有兩個角及其中一角的對邊分別對應相等，符合 AAS 條件，但如何知道兩三角形可以全等呢？由於三角形的內角和都是 180 度，因此∠C 和∠F 也會相等，所以∠B＝∠E、$\overline{BC}=\overline{EF}$、∠C＝∠F，符合 ASA 全等性質，因此△ABC≅△DEF。即**當兩個三角形的兩角及其中一角的對邊分別對應相等，則這兩個三角形就會全等，稱為 AAS 全等性質。**

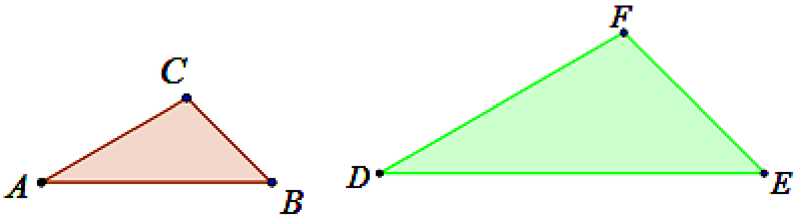
註：AAS 的 S 寫在兩個 A 之後，代表兩個角及其中一角的對邊！

主題三　三角形的全等性質(二)

活動 4：**符合 AAA、SSA 條件未必全等**

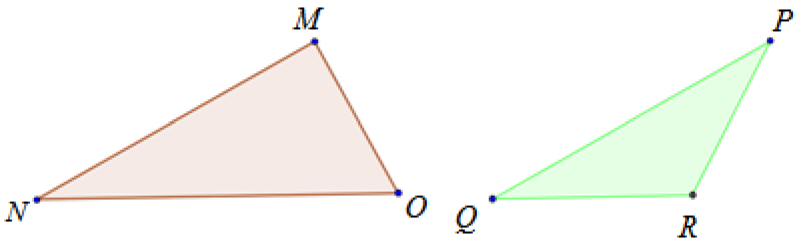
(1) 剪下附件 ΔABC ，疊疊看，ΔABC 與 ΔDEF 有下列的邊角關係嗎？

$\angle A = \angle D, \angle B = \angle E, \angle C = \angle F$ ？他們是否全等？

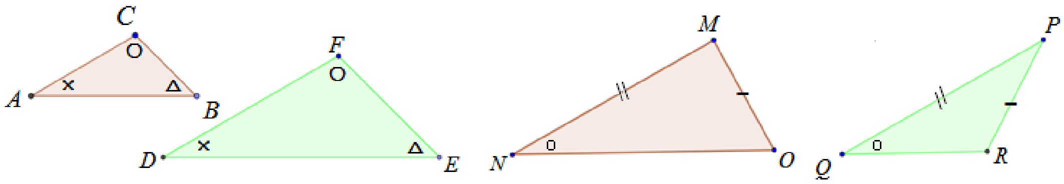


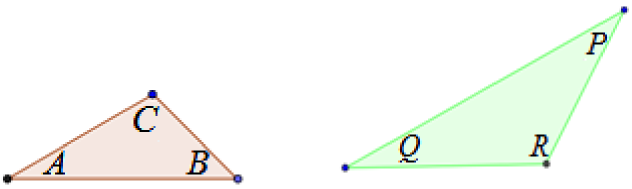
(2) 剪下附件 ΔPQR ，疊疊看，ΔPQR 與 ΔMNO 有下列的邊角關係嗎？

$\overline{MN} = \overline{PQ}$ ，$\overline{MO} = \overline{PR}$ ，$\angle N = \angle Q$ ？他們是否全等？



以上活動得到：(1) ΔABC 與 ΔDEF 的三個內角對應相等，符合 AAA 條件，但邊長不相等，所以不全等。(2) ΔMNO 與 ΔPQR 符合 SSA 條件，但不全等。也就是說， 符合 AAA 或 SSA 條件的兩個三角形未必全等，因此**沒有 AAA、SSA 全等性質。**

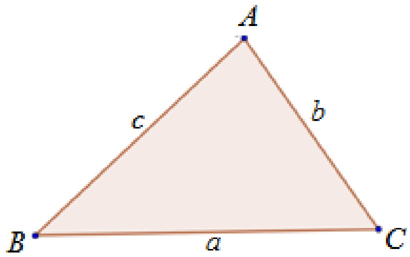


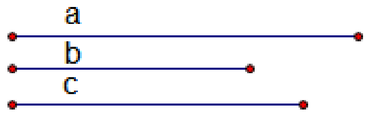


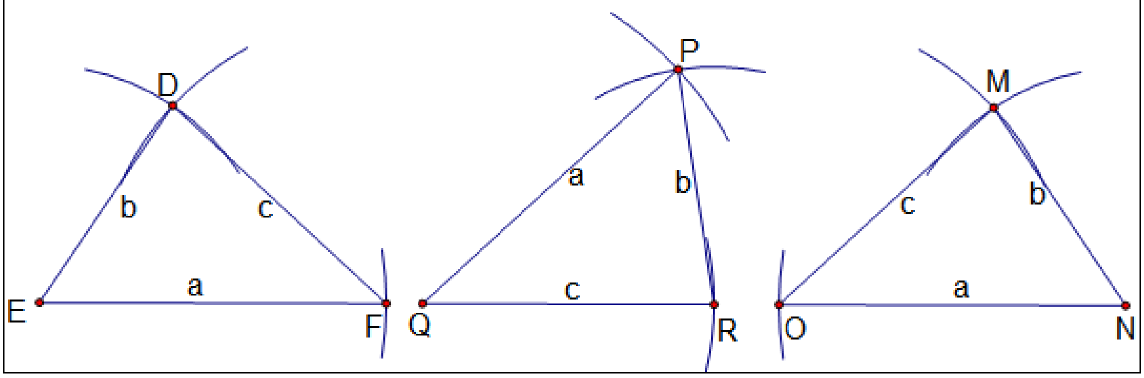
活動 5：發現 **SSS 全等性質**

利用圖中△ABC 的三邊長，可以作出怎樣的三角形呢？

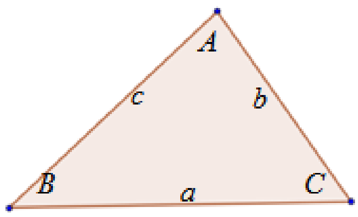
圖中的△DEF、△PQR、△MNO 都是以尺規作圖，用△ABC 的三邊長 a、b、c 所畫出來的。剪下附件的△ABC，與它們疊疊看，結果如何呢？







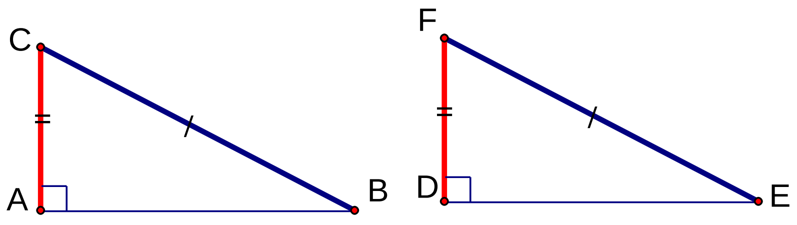
由活動 5 發現，用△ABC 的三邊長只能作出一種三角形，就是與△ABC 全等的三角形。也就是說：**當兩個三角形的三邊分別對應相等，則這兩個三角形就全等，稱為 SSS 全等性質。**



活動 6：發現 **RHS 全等性質**

如圖，在△ABC 與△DEF 中，$\angle D=\angle A=90°$，$\overline{DF}=\overline{AC}$，$\overline{FE}=\overline{CB}$，

則△ABC 與△DEF 是否全等呢？



說說看：

(1) 根據畢氏定理，△ABC 中，$\angle A=90°$，所以 $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$；

同樣的，△DEF 中，$\angle D=90°$，所以$\overline{DE}^2+$______＝______。

(2) 又△ABC 與△DEF 中 $\overline{DF}=\overline{AC}$，$\overline{FE}=\overline{CB}$，那麼$\overline{AB}$和$\overline{DE}$相等嗎？

(3) 由(2) △ABC 與△DEF 會全等嗎？為什麼？

在活動 6 中，我們發現若兩個直角三角形的斜邊和一個股對應相等， 則另一股也會相等，即符合 **SSS 全等性質**，所以全等。也就是說，**當兩個直角三角形的斜邊及一股分別對應相等，則這兩個直角三角形就會全等，稱為 RHS 全等性質。**

(R 代表直角，H 代表斜邊，S 代表一股)。

小試身手：

1. △ABC 與△DEF 中，

若 $\angle A=40°, \angle B=60°, \overline{BC}=5$ ， $\angle D=40°, \angle E=60°, \overline{EF}=5$ ，請問

ΔABC 與 ΔDEF 是否全等？為什麼？

2. △ABC 與△DEF 中，

$\overline{AB}=4, \overline{BC}=5, \overline{AC}=6$ ， $\overline{DF}=4, \overline{DE}=5, \overline{EF}=6$ ，則

△ABC 與△DEF 是否全等？為什麼？

3. 直角三角形 ABC 的斜邊 $\overline{BC}$ 為 7， $\overline{AB}$ 為 4；

直角三角形 DEF 的斜邊 $\overline{EF}$ 為 7， $\overline{DE}$ 為 4。則

△ABC 與△DEF 是否全等？為什麼？

4. 直角三角形 ABC 中，兩股長： $\overline{BC}$ 為 6， $\overline{AB}$ 為 5；

直角三角形 DEF 中，兩股長： $\overline{EF}$ 為 5， $\overline{DE}$ 為 6。則

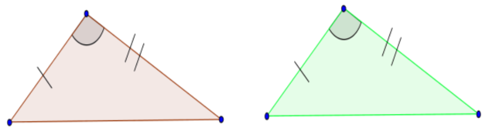
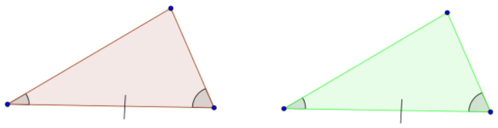
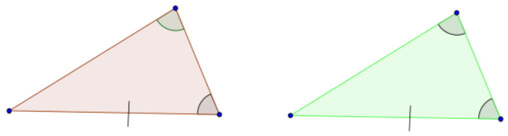
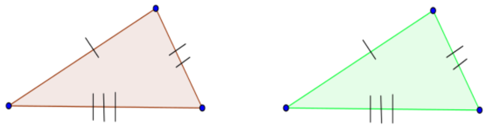
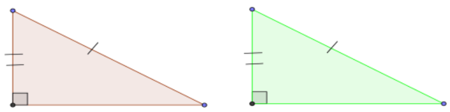
(1)△ABC 中，哪個角是直角？

△DEF 中，哪個角是直角？

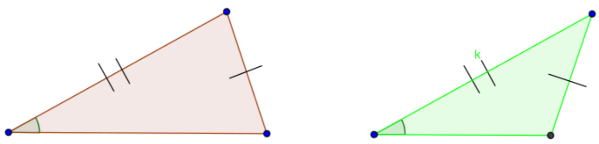
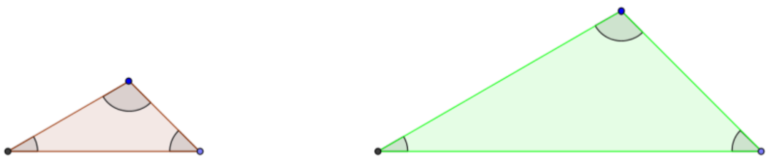
(2) △ABC 與△DEF 是否全等？為什麼？

總結

由之前的課程中可以知道，以下的情況可以保証 2 個三角形全等。

SAS	ASA
	
AAS	SSS
	
RHS	
	(RHS 是 SSA 的特例，此時對應相等的角為 90°。)

而以下的情況**不能**保証 2 個三角形是全等的。

SSA

AAA


主題四 綜合練習

1. 寫出符合的全等性質。

（必要時可先畫出合乎題意的三角形再加以判斷）

(1) ΔABC與ΔPQR中，$\overline{AB}=\overline{PQ}, \overline{BC}=\overline{QR}, \overline{AC}=\overline{PR}$，

由此可根據__________全等性質，推得$\Delta ABC \cong \Delta PQR$。

(2) ΔABC與ΔPQR中，$\angle A=\angle P, \angle B=\angle Q, \overline{AB}=\overline{PQ}$，

由此可根據__________全等性質，推得$\Delta ABC \cong \Delta PQR$。

(3) ΔABC與ΔPQR中，$\angle B=\angle Q, \overline{AB}=\overline{PQ}, \overline{BC}=\overline{QR}$，

由此可根據__________全等性質，推得$\Delta ABC \cong \Delta PQR$。

(4) ΔABC與ΔPQR中，$\angle A=\angle P, \angle B=\angle Q, \overline{AC}=\overline{PR}$，

由此可根據__________全等性質，推得$\Delta ABC \cong \Delta PQR$。

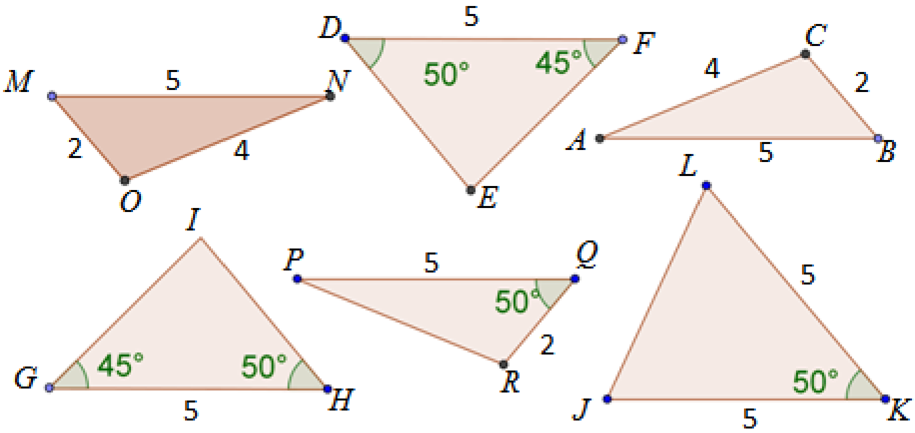
(5) ΔABC與ΔPQR中，$\angle A=\angle P=90^\circ, \overline{BC}=\overline{QR}, \overline{AB}=\overline{PQ}$，

由此可根據__________全等性質，推得$\Delta ABC \cong \Delta PQR$。

(6) ΔABC與ΔPQR中，$\angle A=\angle P=90^\circ, \overline{AC}=\overline{PR}, \overline{AB}=\overline{PQ}$，

由此可根據__________全等性質，推得$\Delta ABC \cong \Delta PQR$。

2. 將下列全等的三角形配對，並寫出所根據的全等性質？

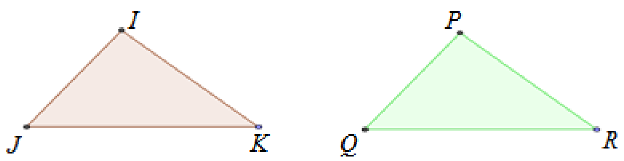


(1) Δ__________和Δ __________全等，根據__________全等性質。

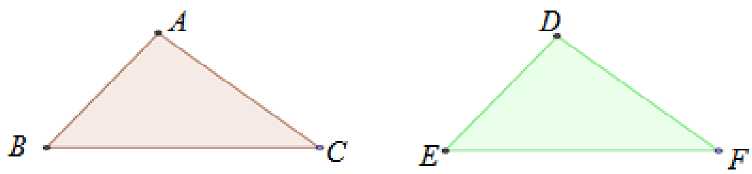
(2) Δ__________和Δ __________全等，根據__________全等性質。

3.請寫出適合的條件，以符合三角形的全等判別性質。

(1) ΔIJK 與 ΔPQR 中，若 $\overline{IJ}=\overline{PQ}, \overline{JK}=\overline{QR},$ ____________，
則可由 SAS 全等性質推得 $\Delta IJK \cong \Delta PQR$ 。



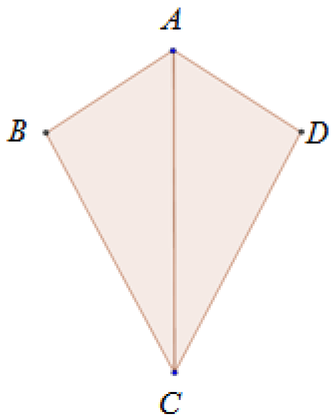
(2) ΔABC 與 ΔDEF 中，已知 $\angle A=\angle D, \angle C=\angle F$,____________，
則可由 ASA 全等性質推得 $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ 。



(3) ΔDEF 與 ΔPQR 中，已知 $\overline{DE}=\overline{PQ},\overline{DF}=\overline{PR}$,____________，
則可由 SSS 全等性質推得 $\Delta DEF \cong \Delta PQR$ 。

(4) ΔABC 與 ΔDEF 中，若 $\angle A=\angle D=90°,\overline{AC}=\overline{DF}$,____________，
則可由 RHS 全等性質推得 $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ 。

4. 觀察右圖回答下列問題：



(1) 若 $\overline{AB}=\overline{AD}$,$\overline{BC}=\overline{DC}$,
又因____________(公用邊)，
則依______全等性質得 $\Delta ABC \cong \Delta ADC$ 。

(2) 若 $\overline{AB}=\overline{AD}$, $\angle BAC=\angle DAC$,
又因____________(公用邊)，
則依______全等性質得 $\Delta ABC \cong \Delta ADC$ 。

(3) 若 $\angle BAC=\angle DAC,\angle BCA=\angle DCA$,
又因__________(公用邊)，
則依______全等性質得 $\Delta ABC \cong \Delta ADC$ 。

(4) 若 $\angle BAC=\angle DAC,\angle B=\angle D$,
又因___________(公用邊)，
則依______全等性質得 $\Delta ABC \cong \Delta ADC$ 。

5. 已知$\Delta ABC \cong \Delta DEF$，A、B、C 分別對應於 D、E、F。
$\angle A = 30°, \angle B = 40°$，請問$\angle F =$？

6. 已知$\Delta ABC \cong \Delta DEF$，A、B、C 分別對應於 D、E、F。
$\overline{AB} = 5, \overline{BC} = 6, \overline{AC} = 7$，請問$\overline{DF} =$？

7. 如下圖，已知$\Delta ABC \cong \Delta DEF$, A、B、C 分別對應於 D、E、F。
$\overline{AB} = 6$，$\overline{AC} = 8$，$\overline{DE} = 2x - 4$，$\overline{EF} = x + 6$，算算看：
(1)x是多少？
(2)$\overline{\text{BC}}$有多長？