

主題二 三角形的全等性質(一)

福爾摩斯是個非常有名的偵探，他第一次認識華生醫生時，在尚無任何交談之前，就說出「你到過阿富汗。」而在之後的許多案件中，也經常在與顧客接觸的第一瞬間，就能將這個顧客的底細全部說出，讓他的顧客大吃



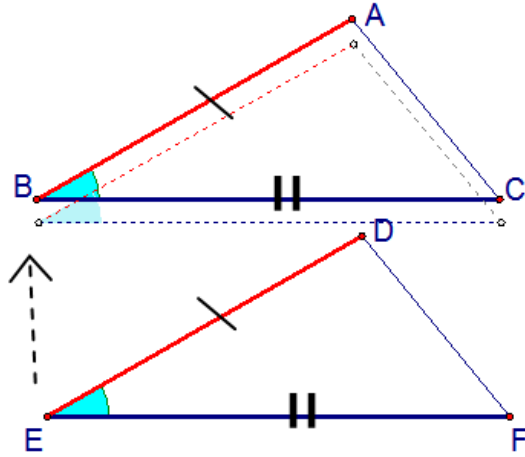
一驚。到底他是怎麼辦到的呢？難道他憑著一些看得到的細節，就能推斷出所有的結果嗎？

其實兩個三角形全等的判定，並不需要知道“全部的對應邊、全部的對應角都相等”後才能判定。只要知道其中的幾組邊或幾組角對應相等，我們就可以說兩個三角形全等。現在我們就來效仿偵探的精神，探討活動1中的一些細節。

為了方便討論，兩個三角形中，我們用「S」表示有一組邊對應相等，用「A」表示有一組角對應相等。而S和A的排列，表示這些對應相等的邊角的位置關係。例如：SSS代表有三組邊對應相等；SAS代表有兩組邊和一組角對應相等，且這組等角是這兩組等邊的夾角，以此類推。

例如，

若依照下列步驟，將活動 1 的 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 疊合會發現什麼呢？



- (1) 因 $\angle B = \angle E$ ，所以 **B 和 E 重合後， $\angle B$ 和 $\angle E$ 的兩邊會重疊在一起**；
- (2) 因 $\overline{AB} = \overline{DE}$ ，所以 \overline{AB} 和 \overline{DE} 疊合時，**A 和 D 會重合**；
- (3) 因 $\overline{BC} = \overline{EF}$ ，所 \overline{BC} 和 \overline{EF} 疊合時，**C 和 F 會重合**；

此時這兩個三角形已經成功的完全疊合在一起。也就是說，

當兩個三角形的兩邊及它們的夾角分別對應相等，則這兩個三角形就會全等，這個性質稱為 SAS 全等性質。

註：*SAS* 的 *A* 寫在兩個 *S* 之間，代表角被兩邊夾住（夾角）！

小試身手：

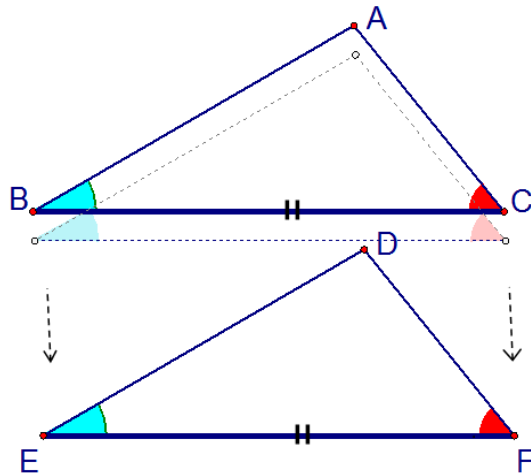
$\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 中，

若 $\angle A = 30^\circ, \overline{AB} = 4, \overline{AC} = 5$ ， $\angle D = 30^\circ, \overline{DE} = 4, \overline{DF} = 5$ ，

則這兩個三角形符合_____全等性質，所以全等。

活動 2：發現 ASA 全等性質

請依照下列的步驟，將活動 1 的 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 疊合。



- (1) 因 $\overline{BC} = \overline{EF}$ ，那麼 \overline{BC} 和 \overline{EF} 疊合時，**B 和 E、C 和 F** 是否可重合？
- (2) 因 $\angle B = \angle E$ 、那麼 $\angle B$ 和 $\angle E$ 的兩邊是否重疊？
- (3) 因 $\angle C = \angle F$ 、那麼 $\angle C$ 和 $\angle F$ 的兩邊是否重疊？
- (4) **此時，A 和 D 是否重合？** 兩個三角形是否已經完全疊合？

當兩個三角形的兩角及它們的夾邊分別對應相等，則這兩個三角形就會全等，這個性質稱為 ASA 全等性質。

註：ASA 的 S 寫在兩個 A 之間，代表邊被兩角夾住（夾邊）！

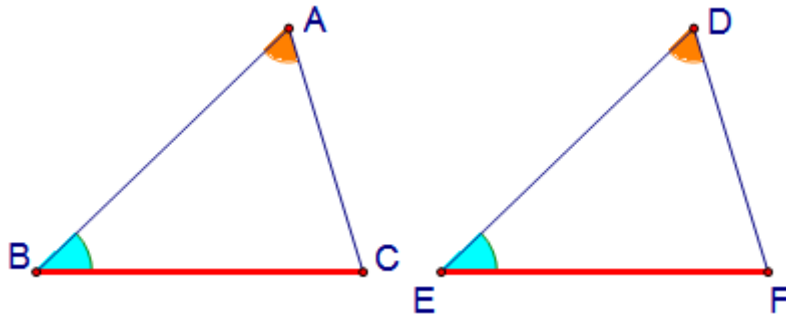
小試身手： $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 中，

若 $\angle A = 30^\circ, \angle B = 45^\circ, \overline{AB} = 5$ ， $\angle D = 30^\circ, \angle E = 45^\circ, \overline{DE} = 5$ ，

則這兩個三角形符合_____全等性質，所以全等。

活動 3：發現 AAS 全等性質

如圖，在 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 中， $\angle A = \angle D$ ， $\angle B = \angle E$ ， $\overline{BC} = \overline{EF}$ ，則 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 是否全等呢？說說看



- (1) 三角形的內角和都是幾度？
- (2) $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 中， $\angle A = \angle D$ ， $\angle B = \angle E$ ，那麼 $\angle C$ 和 $\angle F$ 相等嗎？
- (3) 試著找出兩組相等的對應角及一組對應邊，並利用 ASA 全等性質說明 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 全等。

答： $\underline{\angle C} = \underline{\angle F}$ ， $\underline{\angle A} = \underline{\angle D}$ ， $\underline{\overline{BC}} = \underline{\overline{EF}}$ 。

活動 3 的 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 中，原有兩個角及其中一角的對邊分別對應相等，符合 AAS 條件，但如何知道兩三角形可以全等呢？由於三角形的內角和都是 180 度，因此 $\angle C$ 和 $\angle F$ 也會相等，所以 $\angle B = \angle E$ 、 $\overline{BC} = \overline{EF}$ 、 $\angle C = \angle F$ ，符合 ASA 全等性質，因此 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ 。即當兩個三角形的兩角及其中一角的對邊分別對應相等，則這兩個三角形就會全等，稱為 AAS 全等性質。

註：AAS 的 S 寫在兩個 A 之後，代表兩個角及其中一角的對邊！