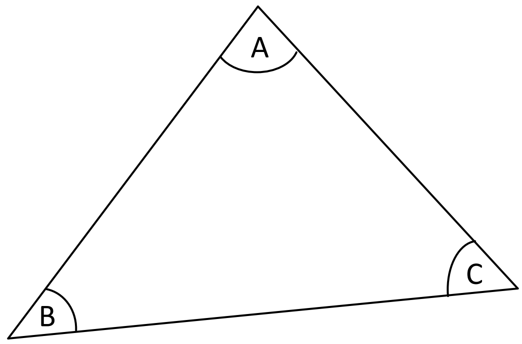
單元六　三角形與多邊形角度相關性質

主題一　凸多邊形外角和

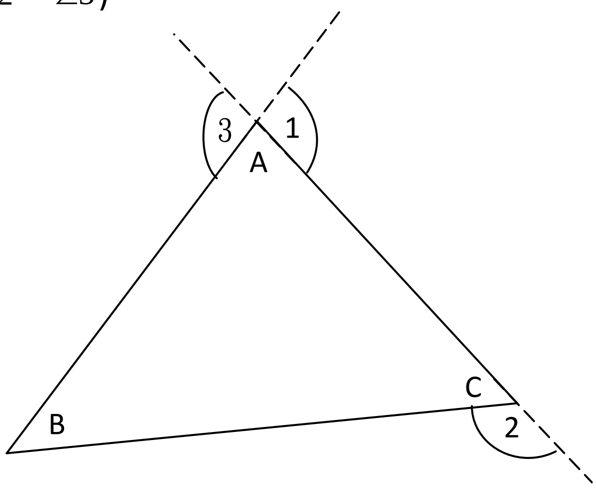
※ 三角形的內角與外角

內角：



外角：一內角的一邊和另一邊的延長線所成的角。

(例如：∠1、∠2、∠3)



活動

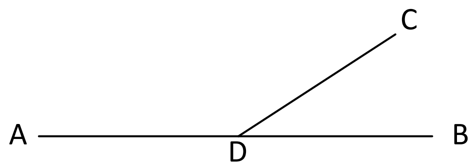
1. 還有哪些外角，試著畫出來，並加以標記(4、5、6...)

2. $\angle A$共有幾個外角呢？$\angle B$共有幾個外角呢？

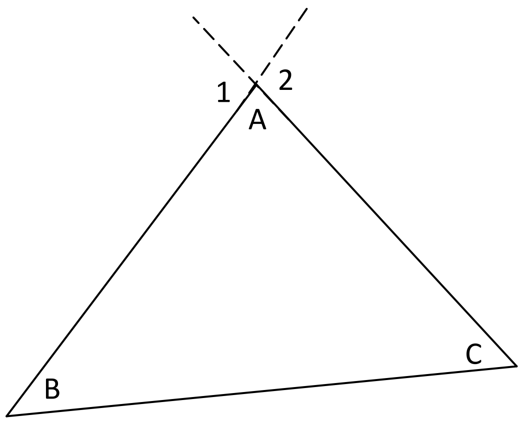
   $\angle C$ 共有幾個外角呢？

※ 練習題

1. 如下圖，若$\angle ADC=130°$則$\angle BDC=$________度。



2. 如下圖，在ΔABC中，已知$\angle A=80°$，則$\angle A$的外角$\angle 1=$________度，$\angle 2=$________度。



3. 在ΔABC中，$\angle A=70°$，$\angle B=58°$，則：

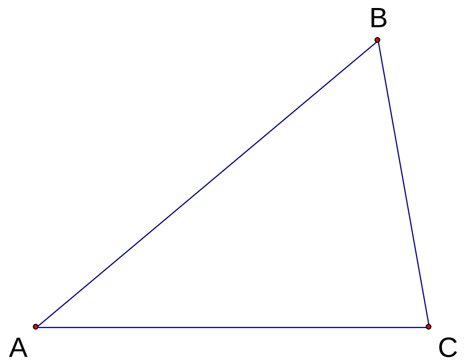
(1) $\angle A$的外角＝________度。

(2) $\angle B$的外角＝________度。

(3) $\angle C$的外角＝________度。

※凸多邊形外角和

遊戲中學數學（一）



步驟 1　ΔABC 中，找出每個內角的一個外角，標記於上圖。

步驟 2　以量角器測量∠A、∠B、∠C 的其中一個外角後，記錄角度於下，並且與其他同學分享。

角度：__________、__________、__________。

上面所有角度相加＝ __________。

分享心得：______________________________。

步驟 3　再來，將所有外角分別剪下，試著組裝起來，你又發現什麼？(可用附件一)

答：____________________________________

____

步驟 4　任意畫出一個三角形於下：

____

步驟 5 將你所畫的三角形重複步驟 1 及步驟 3，有甚麼結果？

步驟 6 任意畫出一個四邊形、五邊形、六邊形或其他多邊形於下，

重複步驟 1 及步驟 3，又有甚麼結果？

我畫的是______邊形。

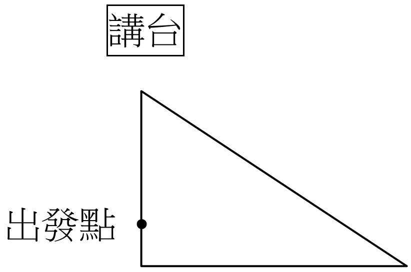
我組裝起來後，發現了____

____

____

遊戲中學數學 (二)

老師在地上畫了個路線圖，請一位同學上去(順時針或逆時針)走一遍回到原出發點，其餘同學畫出該同學轉彎的角。

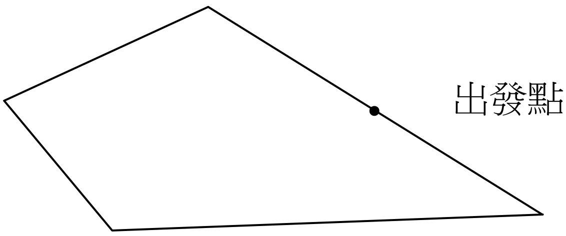


問 1　上去的同學一開始是面對講臺，走完後則是面向哪裡呢？________；也就是說他總共轉了____圈，即________度。

問 2　這些轉彎的角即是此三角形的 ___________　。

問 3　綜合問 1 及問 2，即是________全部相加=________度。

問 4　若老師所畫的路線圖為其他多邊形，如下圖



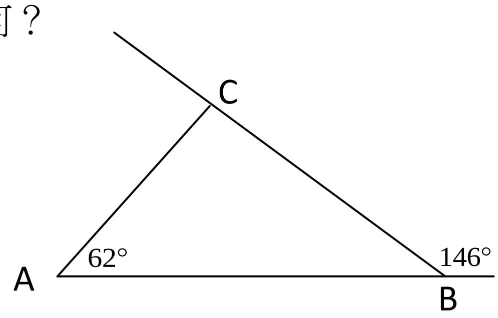
依循問 1~問 3，可有與三角形一樣的結果？

從以上活動，我們發現利用轉一圈 360°的概念，可得：

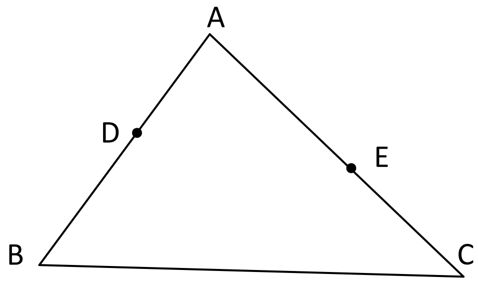
任意多邊形的一組外角和都等於 360°，稱為多邊形的外角和定理。

※練習題

1. 如右圖，ΔABC 中，求∠C 的外角度數為何？



2. 如右圖，Δ ABC 為一處三角型公園，其中∠BAC=80°，外圍是自行車道，創創騎著自行車從 D 點出發，逆時針方向繞著外圍車道騎了一圈回到 D 點，並和出發時面對相同方向，請問：



(1) 創創共轉了多少度？

(2) 若文文是從 E 點出發，經過 A 點到達 D 點，則他轉了多少度？

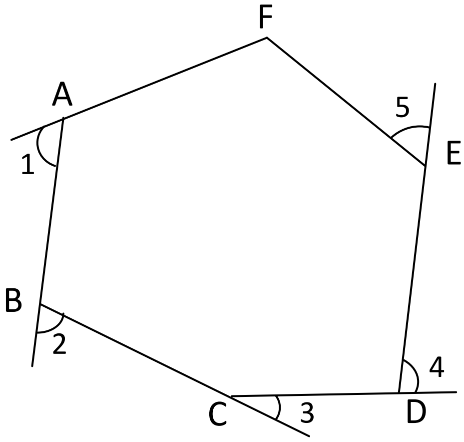
3. 如右圖，六邊形 ABCDEF 中，

∠F=120°，∠1、∠2、∠3、∠4

、∠5 分別為∠A、∠B、∠C、∠D

、∠E 的外角，求：

∠1+∠2+∠3+∠4+∠5=？



4. (1)正八邊形的外角和＝___________度。

正八邊形的每一個外角＝___________度。

(2)正十五邊形的每一個外角＝___________度。

正多邊形的每一個內角(外角)

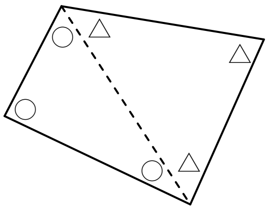
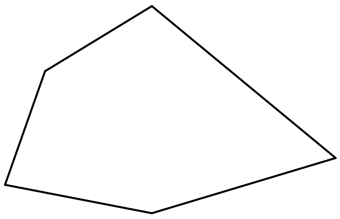
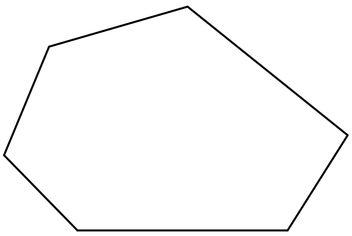
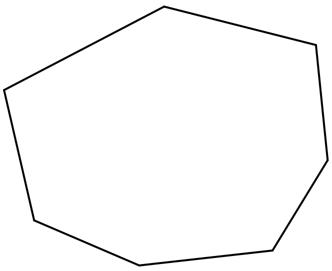
相等，每一個邊長也相等。

正 n 邊形的每一個外角為 $\frac{360°}{n}$

主題二　凸多邊形內角和

※ 複習：三角形內角和為________度。

※ 在下列各多邊形中，由其中一個頂點向其它頂點(與原頂點不相鄰)畫對角線，可以將它們分割成數個三角形，請在表格中填入個數，再利用三角形內角和以得到各個多邊形的內角和。

		對角線數	三角形個數	多邊形內角和
四邊形		1	2	$180^\circ \times 2$ (一組○及一組△剛好為四邊形的內角和)
五邊形				
六邊形				
七邊形				

仔細觀察上個活動中，<u>邊數與三角形個數的關係</u>，並回答底下問題：

(以下問題的答案只需用$180^\circ\times\ldots$ 來表示即可。)

(1) 八邊形的內角和應為___________度。

(2) 九邊形的內角和應為___________度。

(3) 十邊形的內角和應為___________度。

(4) 二十七邊形的內角和應為___________度。

得到：n 邊形的內角和為$(n-2)\times180^\circ$

※ 練習題

1. 二十二邊形的內角和是_______度。

2. (1) 正十八邊形的內角和是______度，每一個內角是_______度。

   (2) 正三十六邊形的內角和是______度，每一個內角是______度。

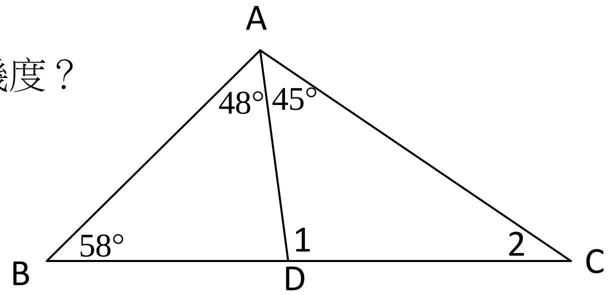
3. 正十八邊形的外角和是________度，每一個外角是________度，

   再由內角與相鄰外角的和為 180 度，得到每一個內角是______度。

正 n 邊形的每一個內角為 $\dfrac{(n-2)\times180^\circ}{n}$ 即是 $180^\circ-\dfrac{360^\circ}{n}$

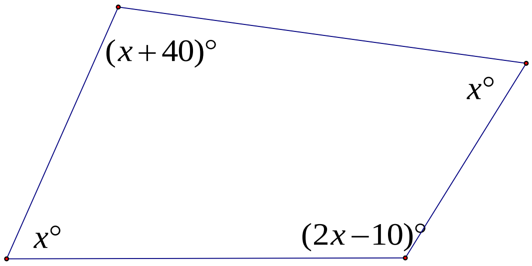
※ 挑戰題

4. 如右圖，求$\angle ADB$、$\angle1$ 與$\angle2$ 各為幾度？



5. 已知四邊形中的各內角

如右圖所示，求 x 。



6. 如右圖，五邊形 ABCDE

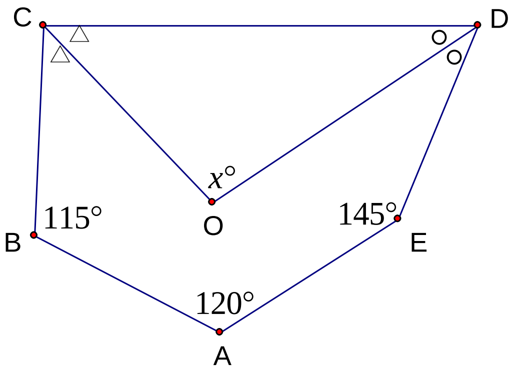
中，若∠C 與∠D 的角平分線

交於 O，試回答下列問題：

(1) 五邊形內角和 = ？

(2) ○ + △ = ？

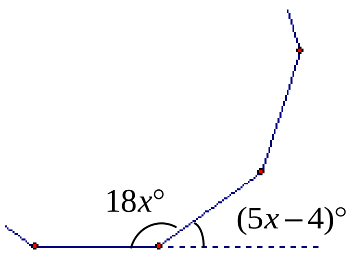
(3) x = ？



7. 如右圖，此為一正 n 多邊形的部分圖形，

請問 x 為多少？ 每一個內角是幾度？

每一個外角是幾度？ n 為多少？

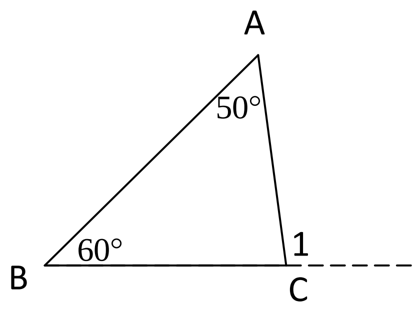


主題三　三角形的外角定理

如右圖，請問：

$\angle ACB =$ ＿＿＿＿＿＿

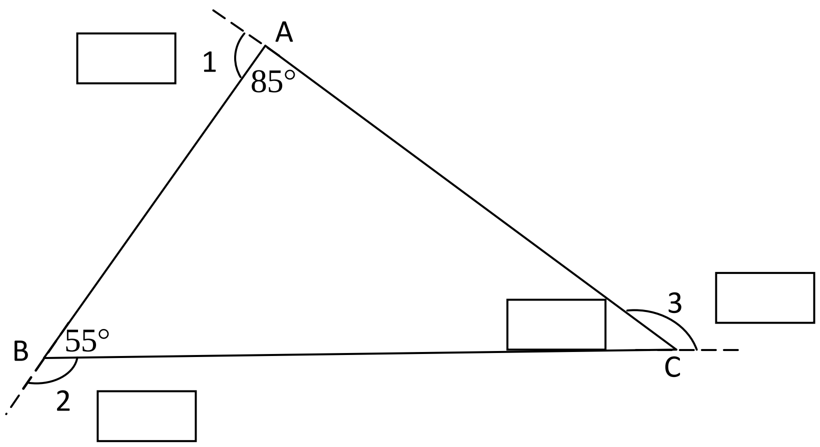
$\angle 1 =$ ＿＿＿＿＿＿



問題探索

想想看，能否不經由$\angle ACB$就能直接求出$\angle 1$？

1. 如下圖，△ABC 中，若$\angle A = 85°$，$\angle B = 55°$，則$\angle C$、$\angle 1$、$\angle 2$及$\angle 3$的度數為何？(請填入 □ 中)



2. (1) ∠1＝＿＿＿＿＿＿度

(2)與∠1 相鄰的內角是∠＿＿＿＿

與∠1 不相鄰的兩內角是∠＿＿＿＿及∠＿＿＿＿(圈起來)

(3)將(2)圈起來的兩角相加，共__________度

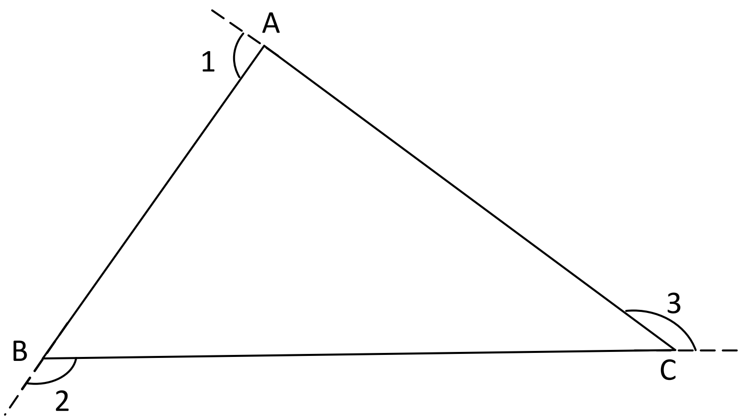
(4)由(1)~(3)可知∠1＝∠________＋∠________

(5)同理可得　　∠2＝∠________＋∠________

∠3＝∠________＋∠________

三角形的任一外角等於不相鄰兩內角的和

※ $\boxed{\text{說明}\quad \angle 1=\angle B+\angle C}$



$\angle A+\angle 1=180^\circ$　…(1)

$\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$　…(2)

比較(1)、(2)式知道

∠A＋∠1＝∠A＋∠B＋∠C

得到

$\angle 1=\angle B+\angle C$

另外也知道

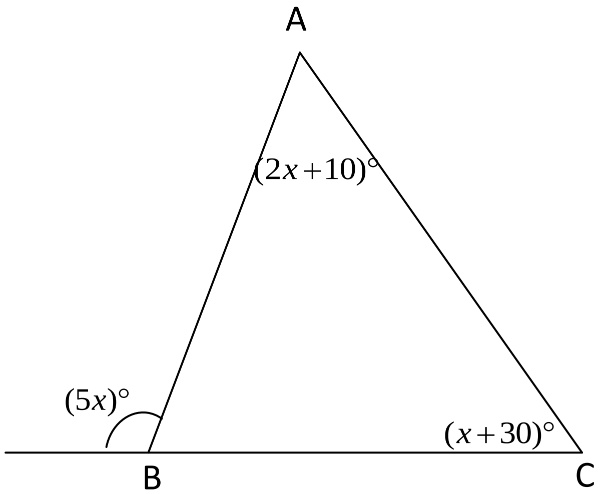
$\angle 1>\angle B$　且 $\angle 1>\angle C$

※ 練習

1. 如右圖，$\angle B$ 的外角是 $(5x)°$，

$\angle A=(2x+10)°$，$\angle C=(x+30)°$

，求 x 及 $\angle ABC$。



2. 如右圖，$\overline{AC}$、$\overline{BD}$ 交於 O，

若 $\angle A=70°$，$\angle C=50°$，

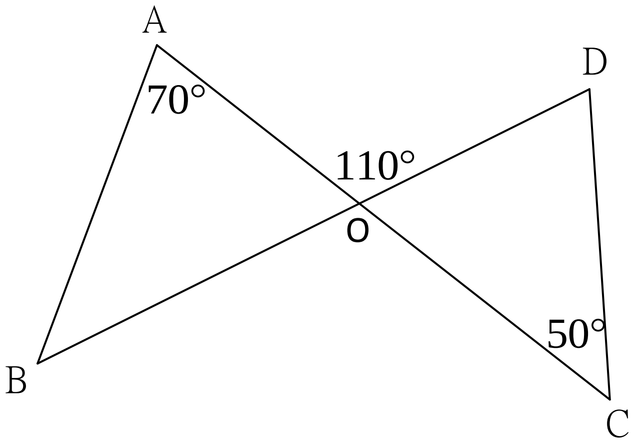
$\angle AOD=110°$，求：

(1) ΔABO 中，利用外角定理，

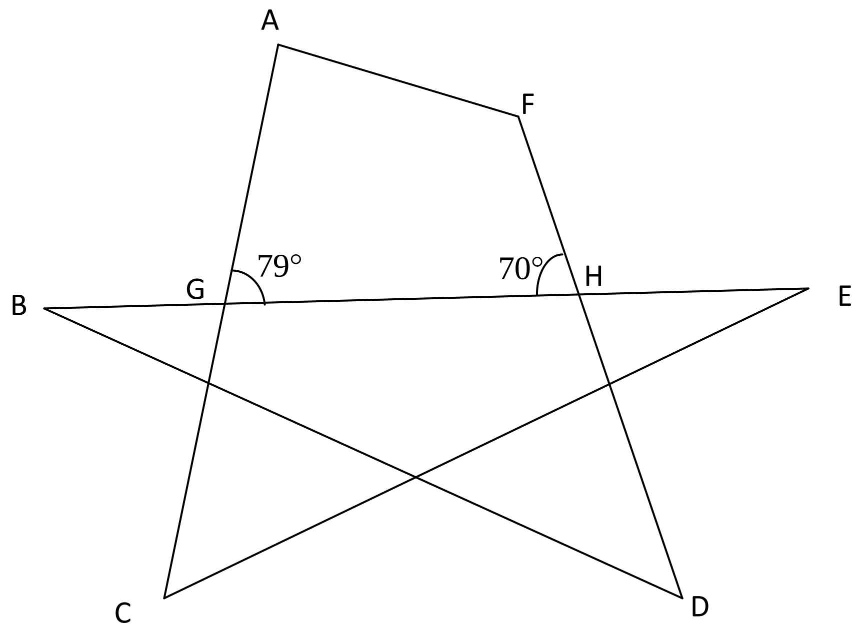
得到 $\angle AOD=\angle A+\angle$________

(2) $\angle B=$_______度

(3) $\angle D=$_______度_



3.



如上圖

(1) 觀察$\angle B$及$\angle D$是哪個三角形的內角，問$\angle B+\angle D$是幾度？

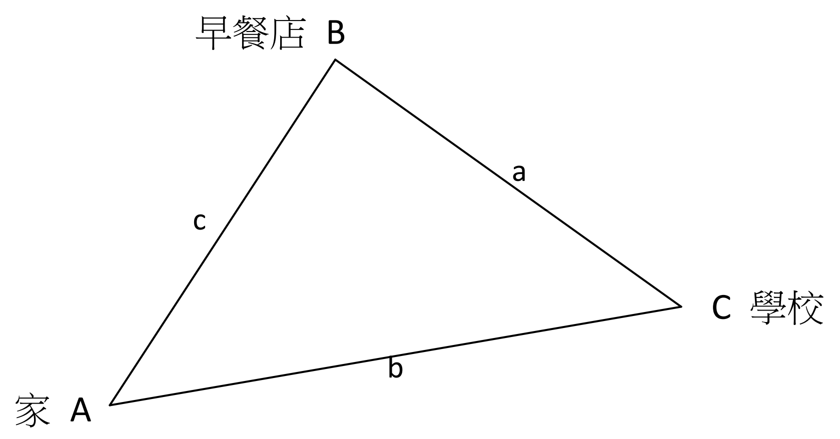
(2) $\angle C+\angle E$是幾度？

(3) $\angle A+\angle F$是幾度？(提示：思考四邊形內角和)

(4) 由(1)、(2)、(3)知道，$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F$是幾度？

主題四　三角形的邊角關係

※ 觀察 ①



若 a、b、c 是△ABC 的三邊長則：

問題一　從家到學校，可走 A-B-C 或 A-C，哪一條路徑較短？

問題二　從早餐店到家，可走 B-C-A 或 B-A，哪一條路徑較短？

問題三　從早餐店到學校，可走 B-A-C 或 B-C，哪一條路徑較短？

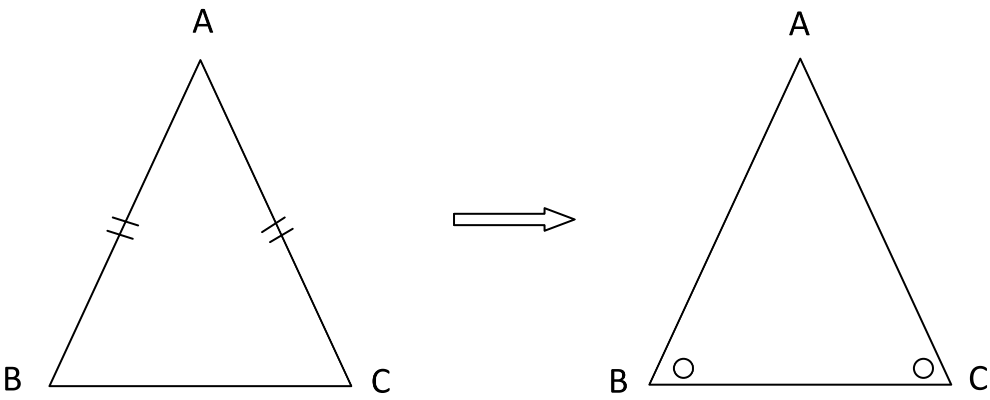
整理後，我們得到　$a+c>b$　...(1)

$a+b>c$　...(2)

$b+c>a$　...(3)

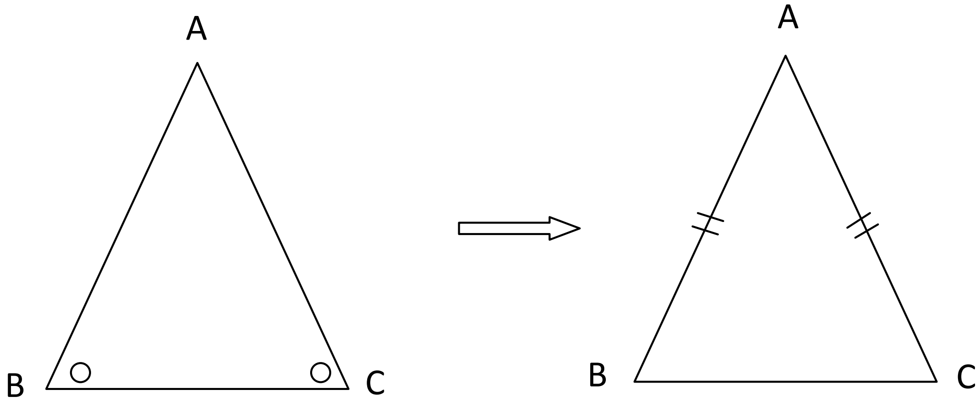
也就是　三角形中任意兩邊的和大於第三邊

※ 觀察②：等邊對等角、等角對等邊



(圖一) (圖二)

若 $\overline{AB}=\overline{AC}$，則 $\angle C=\angle B$，即若三角形兩邊相等，則它們所對的角相等。

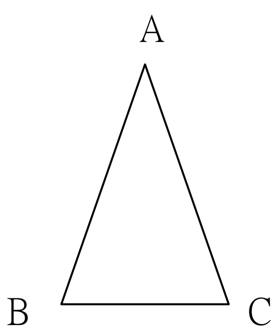


若 $\angle C=\angle B$，則 $\overline{AB}=\overline{AC}$，即若三角形兩角相等，則它們所對的邊相等。

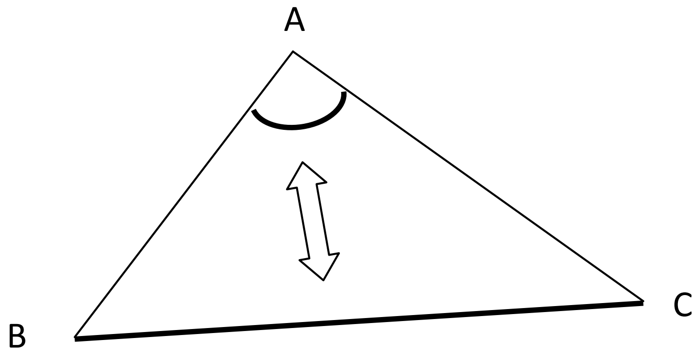
※ 練習題

如右圖，已知△ABC 中，$\overline{AB}=\overline{AC}$，$\angle A=54°$，

求 $\angle B$ 和 $\angle C$ 。



〝對〞究竟是甚麼意思呢？



填填看：　$\angle A$對$\overline{BC}$，$\angle B$對 ______，$\angle C$對 ______ 。

畫出一個三邊長度皆異的三角形於下(須標記 A、B、C 三頂點)：

問 1　記錄三邊的長度，及三內角的度數 (可用直尺、量角器)。

邊：______________、______________、______________。

角度：______________、______________、______________。

問 2　將$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{AC}$依據長度，由大至小排列：

問 3　將∠A、∠B、∠C 依據角度，由大至小排列：

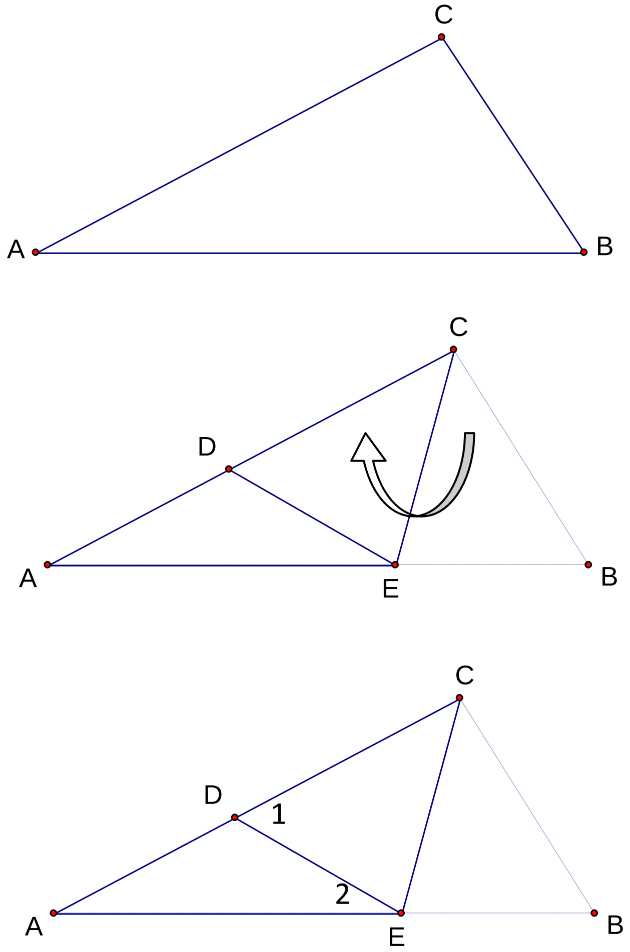
問 4　以上的活動你可有發現邊與角之間的關係？

說明看看一

※ 大邊對大角(附件二)

已知：在 ΔADE 中，$\overline{AC} > \overline{BC}$

說明：∠B ＞ ∠A (∠B 為 $\overline{AC}$ 的對角，∠A 為 $\overline{BC}$ 的對角)



在 ΔADE 中，因為∠1 = ∠A + ______

(三角形外角定理：三角形的任一外角等於不相鄰兩內角的和)

所以∠1 ______ ∠A (填 >、= 或 <)

就是∠B ______ ∠A (填 >、= 或 <)

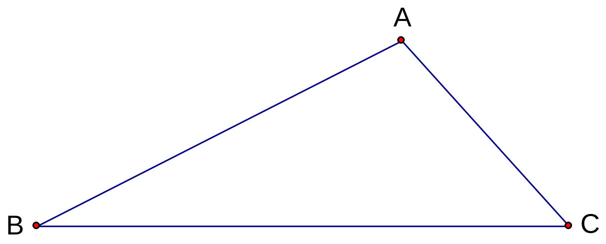
在一個三角形中，若兩邊不相等，則大邊對大角。

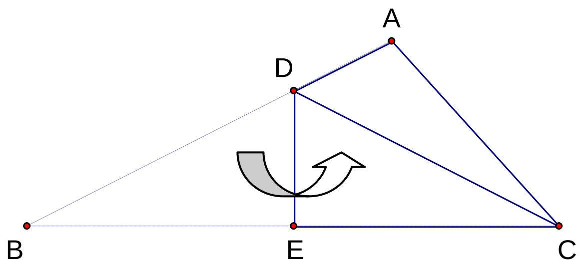
說明看看二

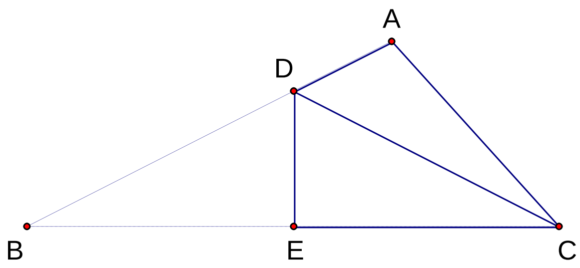
※ 大角對大邊

已知 ∠C > ∠B

說明：$\overline{AB}$ > $\overline{AC}$ ($\overline{AB}$ 為∠C 的對邊，$\overline{AC}$ 為∠B 的對邊)







在 △ADC 中

因為 $\overline{AD}+\overline{DC}$ ______ $\overline{AC}$ (填 >、= 或 <)，且 $\overline{DC}=\overline{DB}$

(三角形兩邊長的和大於第三邊)

所以 $\overline{AD}+\overline{DB}$ ______ $\overline{AC}$ (填 >、= 或 <)

$\overline{AB}$ ______ $\overline{AC}$ (填 >、= 或 <)

在一個三角形中，若有兩角不相等，則大角對大邊。

在一個三角形中，

(1)等邊對等角，等角對等邊

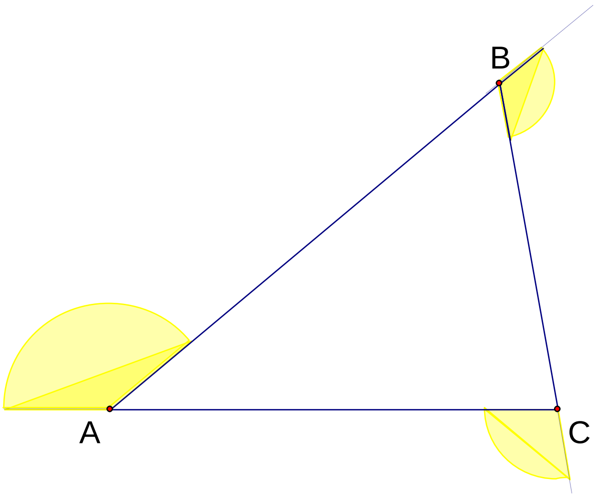
(2)大邊對大角，大角對大邊

※ 練習題

1. △ABC 中，若$\angle A=50°$，$\angle B=60°$，則$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CA}$三邊的大小關係為何？

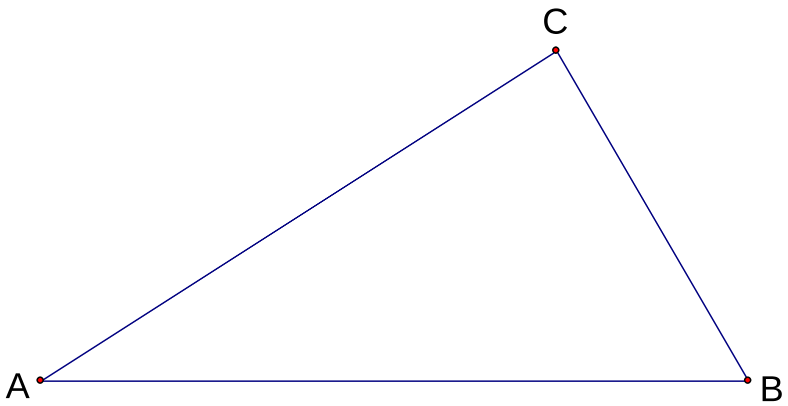
2. △ABC 中，若$\overline{AB}=5$、$\overline{BC}=6$、$\overline{CA}=7$則$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$三內角的大小關係為何？

附件一



附件二

已知 $\overline{AC} > \overline{BC}$



附件三

已知∠C＞ ∠B