





單元五 幾何圖形的面積與長度計算

主題一 常用的四邊形面積

下列每個小方格的邊長為 1 公分，這些圖形的面積是多少平方公分？

正方形	長方形	平行四邊形	梯形
			

常用四邊形面積公式

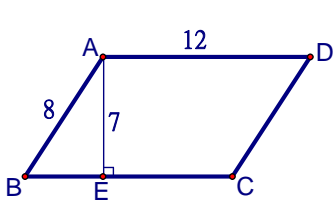
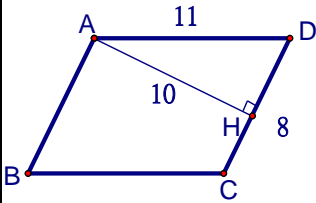
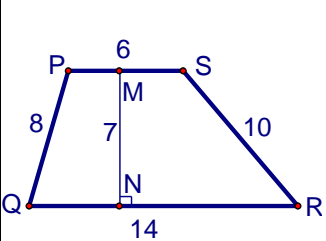
若正方形的邊長為 x ，則其面積為_____。

若長方形的長為 x ，寬為 y ，則其面積為_____。

若平行四邊形的底是 a ，高是 b ，則其面積為_____。

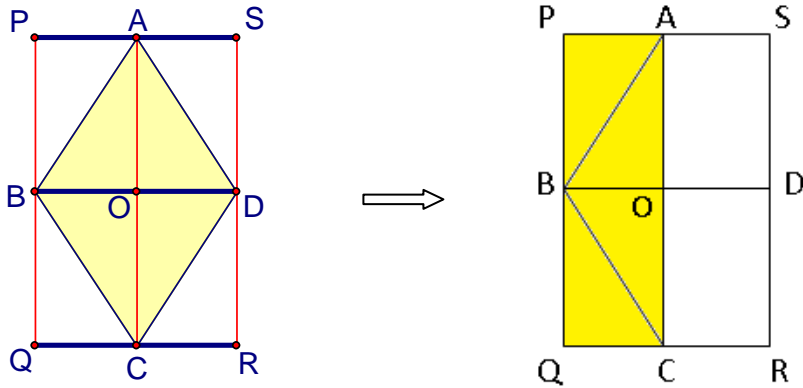
若梯形上底是 a ，下底是 b ，高為 h ，則其面積為_____。

【小試身手】計算各圖形的面積：

〔菱形與箏形面積〕

1. 左下圖，菱形 ABCD 的兩條對角線將菱形分成四塊相同的直角三角形。分別將 $\triangle AOD$ 、 $\triangle COD$ 移到 $\triangle BPA$ 、 $\triangle BQC$ 的位置，如右下圖。

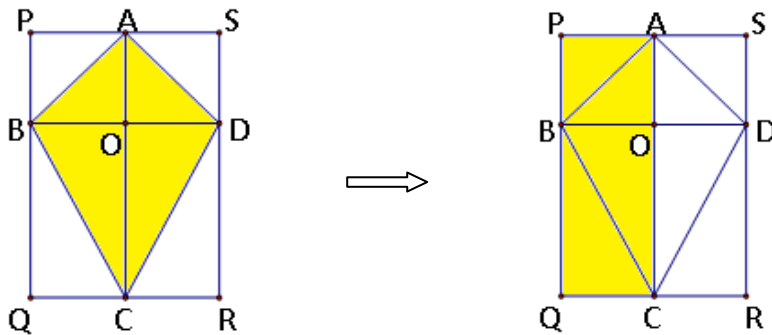


\therefore 菱形的對角線互相垂直，移動過後的菱形變成了一個長方形。

\therefore 菱形 ABCD 的面積 = 長方形 APQC 的面積 = $\overline{QC} \times \overline{AC} = \frac{1}{2} \overline{BD} \times \overline{AC}$

因此 菱形的面積 = $\frac{\text{對角線乘積}}{2}$

2. 左下圖，箏形 ABCD 的兩條對角線將箏形分成兩兩相同的直角三角形。分別將 $\triangle AOD$ 、 $\triangle COD$ 移到 $\triangle BPA$ 、 $\triangle BQC$ 的位置，如右下圖。



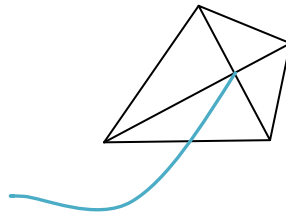
\therefore 箏形的對角線互相垂直，移動過後的箏形變成了一個長方形。

\therefore 箏形 ABCD 的面積 = 長方形 APQC 的面積 = $\overline{QC} \times \overline{AC} = \frac{1}{2} \overline{BD} \times \overline{AC}$

因此 箏形的面積 = $\frac{\text{對角線乘積}}{2}$

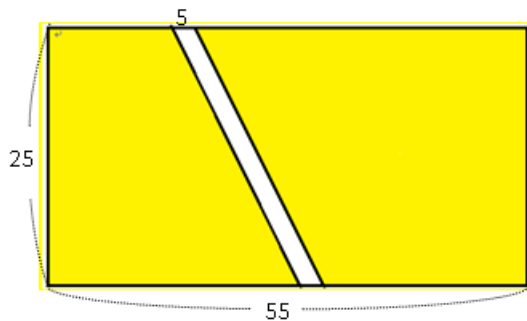
【小試身手】

1. 已知一菱形的對角線分別為 7cm 和 10cm，求此菱形的面積。
2. 小韋製作了一個箏形的風箏，用 80 公分和 50 公分的桂竹作成互相垂直的骨架，則以棉紙作成的風箏表面是多少平方公分？



【小挑戰】

1. 欣樞家有一塊長方形的花園，預計要鋪上一條平行四邊形的走道，請問鋪完道路後，剩餘的黃色區塊面積有多少？

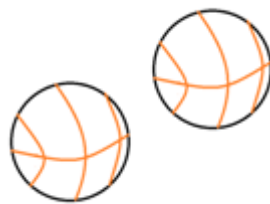


(單位：m)

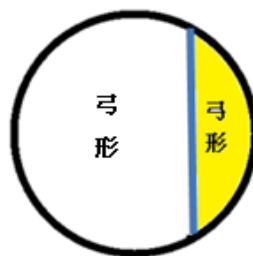
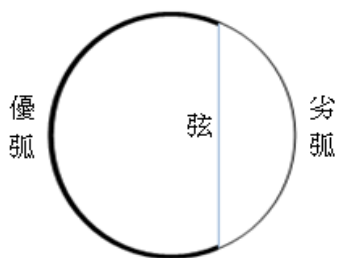
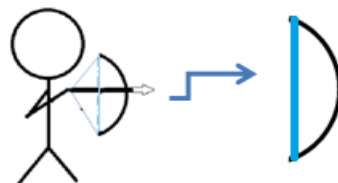
2. 已知一菱形的對角線分別為 $2x$ 公分和 $5x$ 公分，且此菱形的面積為 180 平方公分，求 x 。

主題二 認識弓形與扇形

生活中常常見到各式各樣的圓形圖案，像是圓形時鐘、籃球等等…。如果兩圓半徑相同，我們稱這兩圓為“等圓”。



實際上，我們也常見到與圓形有關的東西，像遠古時代的人類已開始利用弓箭作為武器。那弓箭上的每一個細節如果放到一個圓上，又該如何稱呼它們呢？



(一) 連接圓上任意兩點所形成的線段稱為「**弦**」。

〔考考你〕：你覺得圓的直徑是一個弦嗎？那半徑是嗎？

(二) 一弦把圓周分成兩部分，每一部分都稱為「**弧**」。

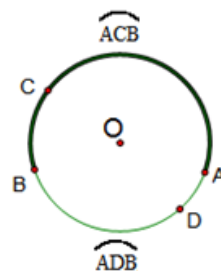
大於半圓的弧稱為**優弧**，小於半圓的弧稱為**劣弧**。

如果這條弦恰為直徑，則圓周分成的兩部分都是**半圓**。

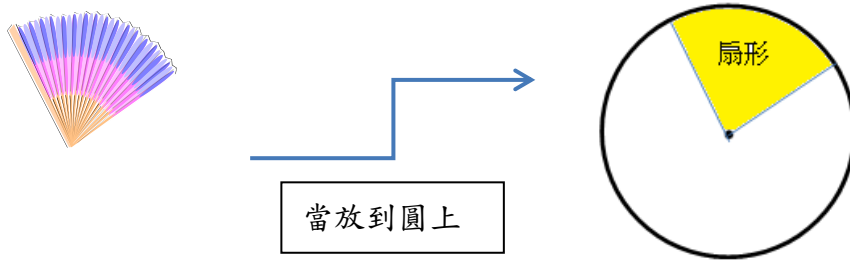
(三) 圓上一弦和它對應的弧所圍成的圖形稱為「**弓形**」。

每條弦會切出兩塊弓形喔！

如圖，圓 O 上任意兩點 A 、 B 將圓分為兩個弧，稱為 AB 弧，以「 \widehat{AB} 」表示。為了區別此兩弧，可在弧上各取一點 C 、 D ，把這兩弧表示成「 \widehat{ACB} 」及「 \widehat{ADB} 」。



日常生活中，我們都認識這樣的圖形是個扇子，那扇子上的每一個細節如果放到一個圓上，又該如何稱呼它們呢？



(一)由圓的兩個半徑與一弧所圍成的圖形稱為「**扇形**」。

(二)扇形中兩半徑所夾出來的角則稱為「**圓心角**」。

【小試身手】

1.

圓心角的度數 = ? Ans: _____ 度	圓心角的度數 = ? Ans: _____ 度	圓心角的度數 = ? Ans: _____ 度

2. 承接上題，回答下列問題：

(1) 以左圖圓心角作成的扇形面積，是圓面積的幾分之幾？_____

(2) 以中圖圓心角作成的扇形面積，是圓面積的幾分之幾？_____

(3) 以右圖圓心角作成的扇形面積，是圓面積的幾分之幾？_____

3. (1) 連接圓上任意兩點所形成的線段稱為_____。

(2) 大於半圓的弧稱為_____，小於半圓的弧稱為_____。

(3) 圓上一弦和它對應的弧所圍成的圖形稱為_____。

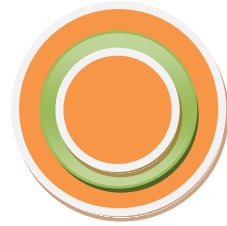
(4) 圓的兩個半徑與一弧所圍成的圖形稱為_____。

主題三 扇形面積與弧長

〔圓心角演練〕

欣樺要跑一個圓形的操場，一圈有 360 度。

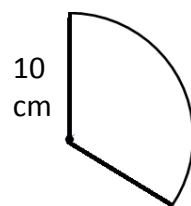
1. 第一趟他跑了操場的半圈，他共跑了幾度呢？
2. 第二趟他跑了操場的 270 度，他跑了一圈的幾分之幾呢？
3. 如果欣樺跑了 100 度，會是一圈的幾分之幾？
4. 最後一趟，欣樺決定只要跑 $\frac{3}{8}$ 圈，那他跑了幾度？



〔扇形面積〕

現在的時間來到了四點！時針和分針把這個時鐘切出了一塊扇形，而且扇形的半徑是 10cm。

1. 這個扇形是圓的幾分之幾呢？
2. 這個扇形的圓心角是幾度呢？
3. 這個圓的面積是多少？
4. 這個扇形面積是圓面積的幾分之幾呢？
5. 這個扇形的面積是多少？

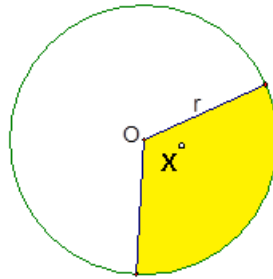


- 整理計算扇形面積的方法如下：
1. 算出整個圓的面積。
 2. 判斷扇形佔整個圓的幾分之幾。
 3. 扇形面積出來囉！

《扇形面積》

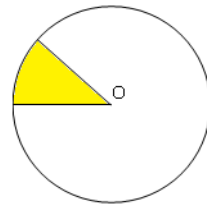
扇形的半徑是 r ，圓心角 x° ，

1. 整個圓的面積 $= r^2\pi$
2. 扇形佔整個圓的 $\frac{x}{360}$
3. 扇形面積 $= r^2\pi \times \frac{x}{360}$



例 1：圓 O 中有一個扇形，圓的半徑為 5cm，扇形的圓心角是 40 度。

- (1) 圓的面積 = ？
- (2) 扇形面積佔了圓面積的幾分之幾？
- (3) 扇形的面積 = ？



【小試身手】

1. 一個圓半徑是 10，圓中有一個扇形，扇形的圓心角是 150 度，求這個扇形面積。

〔計算弧長〕

計算弧長跟計算扇形面積很像，弧長也是佔了整個圓周長的一部份。

1. 已知一圓的圓周長是 20π ，那麼此圓的半圓弧長會是多少？

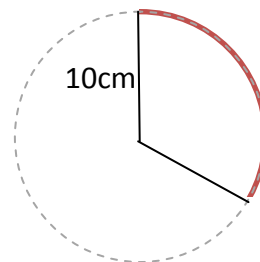
2. 時間又來到了四點！時針和分針把這個時鐘切出了一塊扇形，而且扇形的半徑是 10cm。

(1) 這個扇形是圓的幾分之幾呢？

(2) 這個扇形的弧長是圓周的幾分之幾呢？

(3) 這個圓的周長是多少？

(4) 這個扇形的弧長是多少？



整理計算弧長的方法如下：1.算出整個圓周長。

2.判斷弧佔圓周的幾分之幾。

3.弧長出來囉！

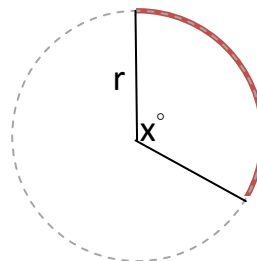
《弧長》

圓的半徑是 r ，弧所對的圓心角為 x° ，

1. 圓周長 $= 2\pi r$

2. 弧佔圓周的 $\frac{x}{360}$

3. 弧長 $= 2\pi r \times \frac{x}{360}$



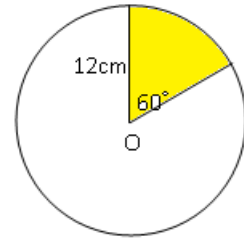
例 2：右圖中，圓的半徑為 12cm，扇形的圓心角是 60 度。求：

(1) 圓的周長。

(2) 扇形的弧長佔圓周長的幾分之幾？

(3) 扇形的弧長。

(4) 此扇形的周長。〔提示：包括 2 個半徑和 1 個弧〕



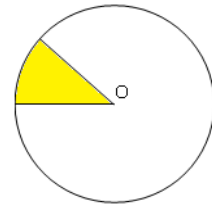
【小試身手】

1. 已知扇形的半徑為 8cm，圓心角為 40 度，求：

(1) 此扇形的面積。

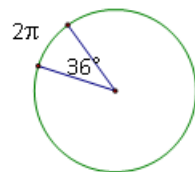
(2) 扇形的弧長。

(3) 此扇形周長。

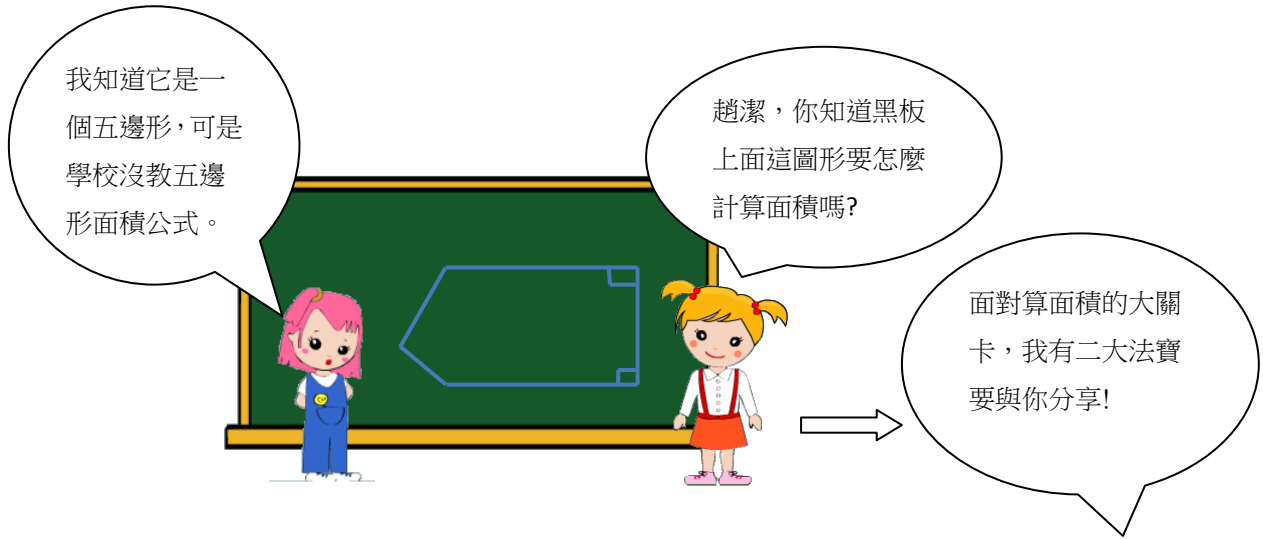



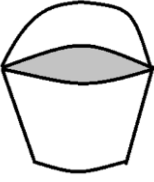
2. 一圓上有一弧，其所對的圓心角為 70 度，此弧的長度是圓周長的 _____ 倍。

3. 如圖，扇形的圓心角為 36 度，扇形的弧長是 2π 公分，求此圓的圓周長為多少公分？



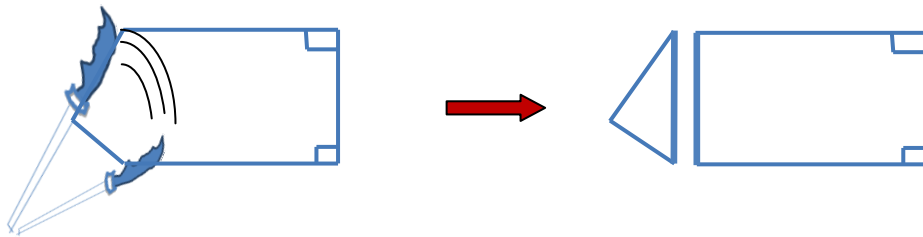
主題四 複合圖形



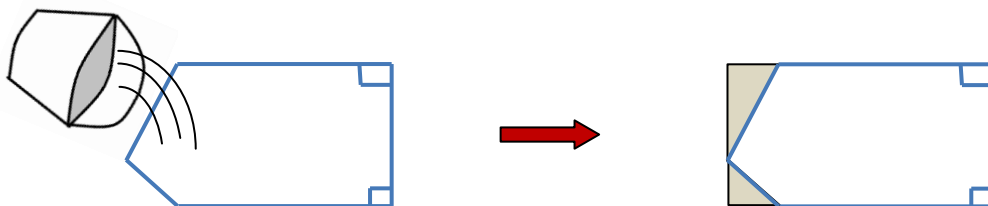
法寶一:大刀	法寶二:水泥
	

使用方法：

法寶一(大刀)：將圖形切成可以使用公式計算的形狀！

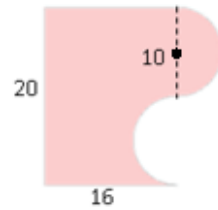


法寶二(水泥)：把不規則的圖形，填補成好計算的形狀！

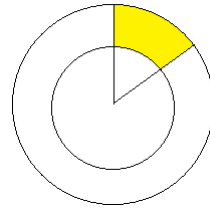


【面積小挑戰】

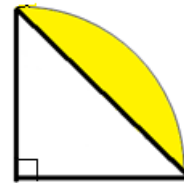
1. 請計算出右圖粉色部分的面積。



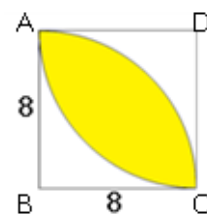
2. 右圖，兩個同心圓中，大圓半徑為 8cm，小圓半徑為 5cm，且已知圓心角為 60 度，請問黃色部分面積為何？



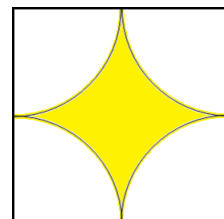
3. 已知黃色部分的弓形，是由一個扇形被一塊等腰直角三角形切割之後剩下的區塊，若此扇形的半徑是 6cm，請試看看求出黃色部分的面積。



4. ABCD 為正方形，扇形 ABC 與扇形 ADC 的圓心分別是 B、D，請算出右圖黃色部分面積。

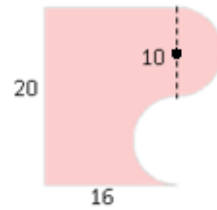


5. 右圖黃色部分，為一個正方形被四塊完全相等的扇形切割所剩下的部分，若已知此正方形邊長為 12cm，扇形半徑是 6cm，請問黃色部分面積為？

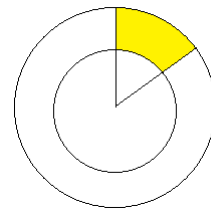


【周長小挑戰】

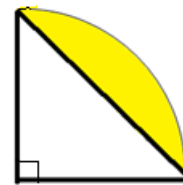
1. 請計算出右圖粉色部分的周長。



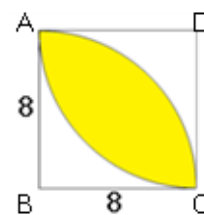
2. 右圖的大圓半徑為 8cm ，小圓半徑為 5cm ，且已知圓心角為 60° ，請問黃色部分周長為何？



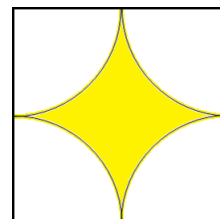
3. 已知黃色部分的弓形，是由一個扇形被一塊等腰直角三角形切割之後剩下的區塊，若此扇形的半徑是 6cm ，請試看看求出黃色部分的周長。



4. $ABCD$ 為正方形，扇形 ABC 與扇形 ADC 的圓心分別是 B 、 D ，請算出右圖黃色部分周長。

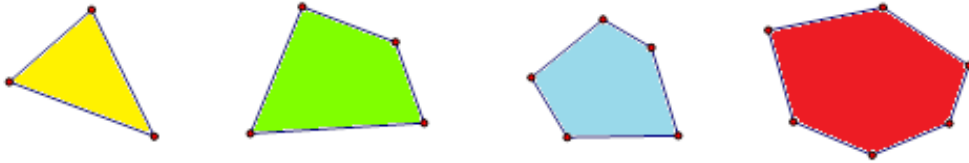


5. 右圖黃色部分，為一個正方形被四塊完全相等的扇形切割所剩下的部分，若已知此正方形邊長為 12cm ，扇形半徑是 6cm ，請問黃色部分周長為？



主題五 認識多邊形

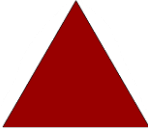

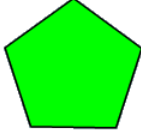
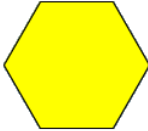
一般我們見到的三角形、四邊形、五邊形、六邊形…等，是以邊數來命名的，統稱為**多邊形**。如圖：



何謂正多邊形呢？

若一個多邊形的所有角都相等，且所有邊都相等，則稱為**正多邊形**。

常見的正多邊形，如下：

			
正三角形 (等邊三邊形)	正四邊形 (正方形)	正五邊形	正六邊形

結論：正 n 邊形有 n 個頂點， n 個等角， n 個等長的邊。

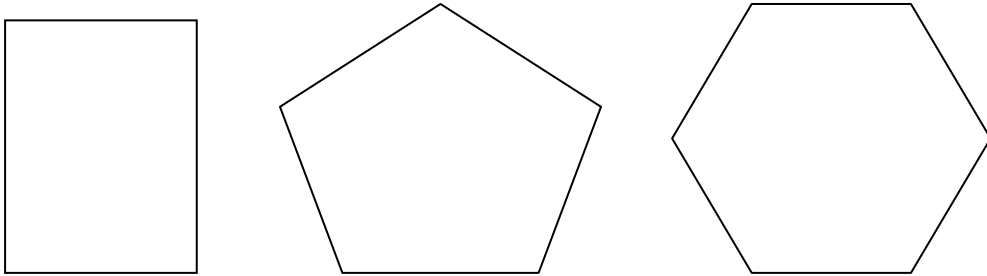
【小試身手】

1. 有一個正五邊形，邊長為 6，則此正五邊形的周長為_____。
2. 有一個正八邊形，周長為 96，則此正八邊形的邊長為_____。
3. 已知正十二邊形的所有內角總和為 1800 度，則正十二邊形的每一個內角為_____度。
4. 已知正十邊形的每一個內角為 144 度，則正十邊形的所有內角總和為_____度。

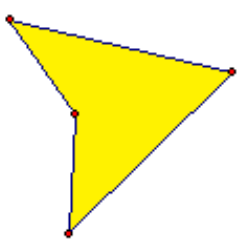
〔對角線〕

多邊形不相鄰的兩頂點連線，稱為對角線。

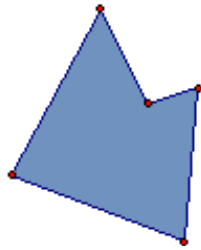
動手畫畫看：畫出四邊形、五邊形、六邊形的所有對角線。



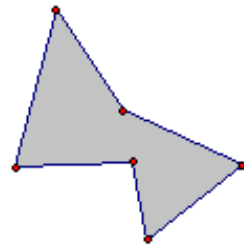
也許你看過長成像下圖這樣的多邊形！



凹四邊形



凹五邊形

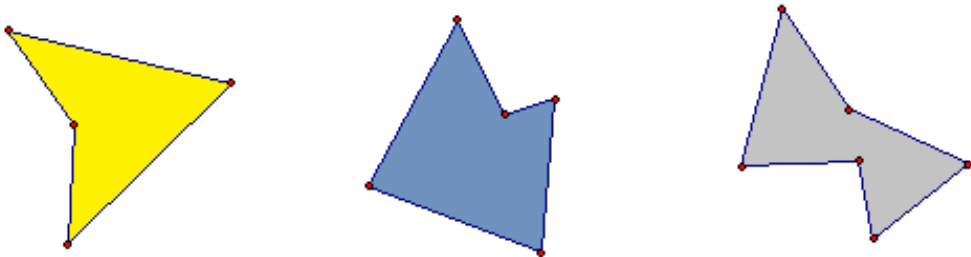


凹六邊形

這些多邊形至少有一個內角大於 180° ，也就是至少有一條對角線在多邊形外部，我們稱為凹多邊形。一個多邊形如果不是凹多邊形，就稱為凸多邊形。因此，凸多邊形的每個內角都小於 180° 。通常如果沒有特別強調，指的都是凸多邊形。

動手畫畫看：

1. 請在下列三個凹多邊形中，標示出大於 180° 的內角。
2. 請在下列三個凹多邊形中，連出在多邊形外部的對角線。

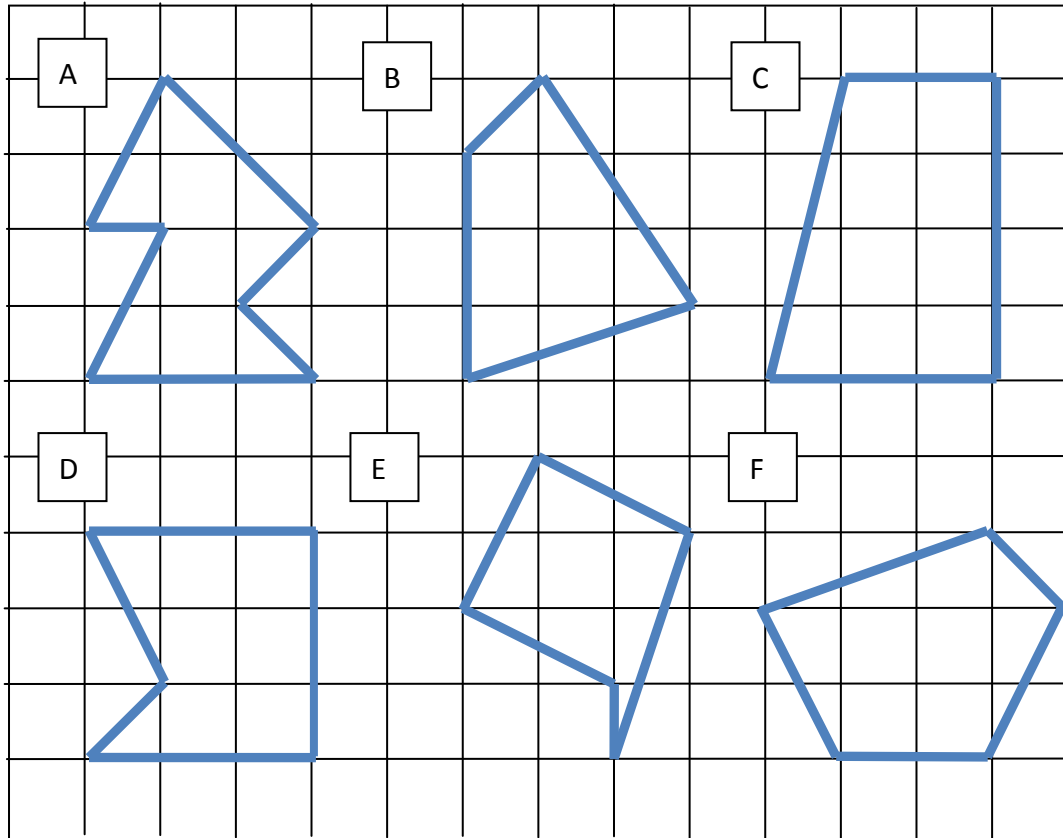


【小試身手】

1. 請分辨下列各圖形，哪些是凸多邊形？那些是凹多邊形？

凸多邊形：_____

凹多邊形：_____



2. 承接第 1 題，若每一個方格的邊長都是 1 單位。

(1)分別求圖 A、B、C 各多邊形的面積。

(2)分別求圖 D、E、F 各多邊形的周長。(提示：斜線用商高定理)