單元四 尺規作圖

主題一、來自古希臘的挑戰

在很久以前的古希臘，人們非常喜歡研究幾何學。

後來，他們發現許多的幾何圖形都可以只用「**直尺**」和「**圓規**」來畫出，於是就發展出了這一門叫做「尺規作圖」的學問。並且，他們希望可以用<u>最簡單</u>的工具就完成這項工作，於是就有了規定：

I. 直尺只能拿來畫直線，而不能量長度。

II. 圓規可以隨意拉開一個長度畫圓，但是不可以有刻度。

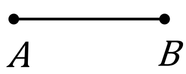
雖然在這樣的條件下好像很困難，但是只用尺規就可以作出的圖形卻遠遠超過我們想像中的多。

先讓我們來練習一些簡單的技巧：

(1)<u>直尺可以做的事</u> (將一條線延長、通過兩點畫出一條直線)

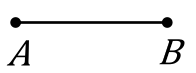
<a>將$\overline{AB}$（讀成線段 AB）繼續向兩邊延伸成$\overleftrightarrow{AB}$（讀成直線 AB）。

<b>連接點 C和點 D，畫出$\overleftrightarrow{CD}$。



(2)<u>圓規可以做的事</u> (畫圓、畫圓弧)

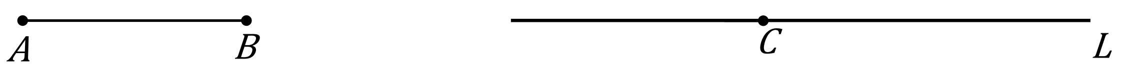
<a>以 A 點為圓心， $\overline{AB}$為半徑畫一個圓（稱為圓 A）。



(3)<u>圓規可以用來畫一個固定長度</u>

已知$\overline{AB}$與直線 L 上的一點 C，請在直線 L 上找一點 D，讓$\overline{CD}$和$\overline{AB}$的長度一樣。

(小提示：可以找到兩個點，這裡只要選擇其中一個就好。)



(4)已知$\overline{AB}$、$\overline{CD}$， 請先將$\overline{AB}$延長成$\overleftrightarrow{AB}$，

再以點 B 為圓心、$\overline{CD}$為半徑作一個圓 B，這時候圓 B 和$\overleftrightarrow{AB}$會有兩交點。

令圓 B 與$\overleftrightarrow{AB}$的交點為點 E，與$\overleftrightarrow{AB}$的另一個交點為點 F。

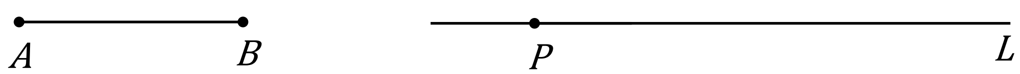
<a>請說明$\overline{\boldsymbol{AE}}$和$\overline{AB}$、$\overline{CD}$有什麼樣的關係？

<b>請說明$\overline{\boldsymbol{AF}}$和$\overline{AB}$、$\overline{CD}$有什麼樣的關係？

(5)已知一個$\overline{AB}$，有一個點 P 在直線 L 上，

請在直線 L 上找出一個點 Q，讓線段$\overline{PQ}$是線段$\overline{AB}$長度的 2 倍。

($\overline{PQ} = 2\overline{AB} = \overline{AB} + \overline{AB}$)



〈小試身手〉如圖，下面有一個直角$\angle O$ 和一條長度是 1 單位的線段，

請你在$\angle$O的一邊找出$\overline{\mathrm{OA}}$，且$\overline{\mathrm{OA}}=3$；

接下來，請在$\angle$O的另一邊找出$\overline{\mathrm{OB}}$，且$\overline{\mathrm{OB}}=4$。

請問$\overline{AB}$的長度(也可用尺規量看看)？$\overline{AB}=$______。

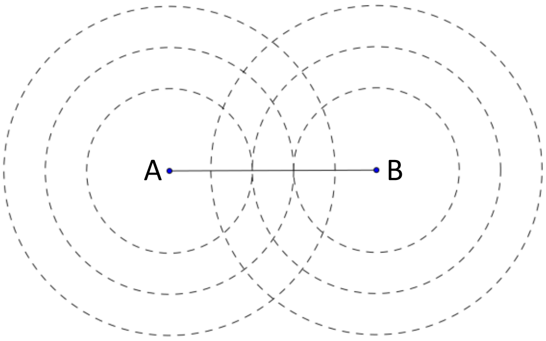
〈小試身手〉如圖，下面有$\overline{\mathrm{AB}}$，

分別以點 A,B 為圓心，半徑取 2、3、4 單位長畫同心圓，

請問：

(1)請你在圖上**標出一點 P**，使得$\overline{\mathrm{PA}}=3$且$\overline{\mathrm{PB}}=4$。

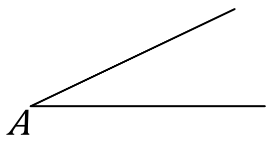
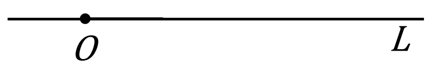
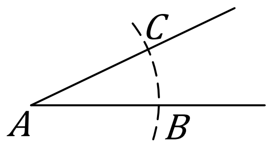
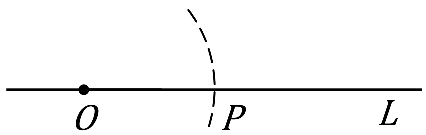
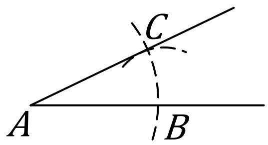
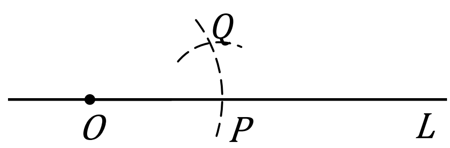
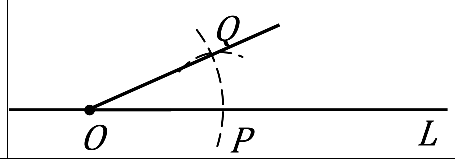
(2)請你觀察，ΔPAB會是一個什麼樣的三角形？



(3)請問，滿足題(1)條件的點會有幾個？

接下來，讓我們來練習關於角度的作圖技巧：

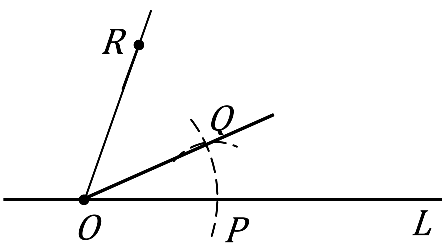
(6)已有一個∠A，再作一個和∠A一樣大的角。

作　法	已知的∠A	作出一個新的角
		
①用尺畫出一條直線 L， 再於線上取一點 O。		
②以點 A 為圓心， 取適當長度畫圓弧， 使此弧與∠A的兩邊相 交於 B、C 兩點。		
③取同樣長度($\overline{AB}$)為半 徑，以點 O 為圓心畫 弧，與直線 L 交於點 P。		
④以點 B 為圓心 取$\overline{BC}$為半徑畫一弧。		
⑤再以點 P 為圓心， $\overline{BC}$為半徑畫弧， 與原本的弧相交點 Q。		
⑥連起$\overline{OQ}$， ∠QOP就是所要的角。		

※驗證：請用量角器測量∠QOP是否等於∠A？

※思考：如右圖，若∠QOP＝∠A，

則∠ROQ ＝ ∠________ －∠A。

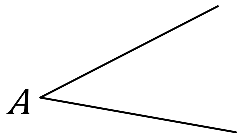


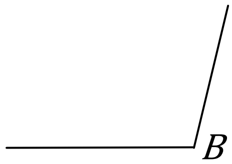
〈小試身手〉

(1)已知∠A與直線 L 上一點 O。

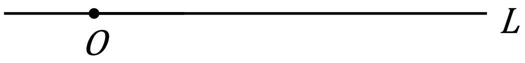
請以 O 為頂點，直線 L 為邊，作∠O，使∠O=∠A。

(2)已知∠B。請作一個角與∠B一樣大，並標示為∠DEF。

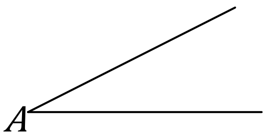


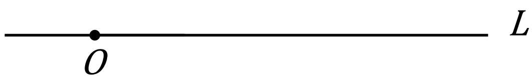


(1)　　　　(2)



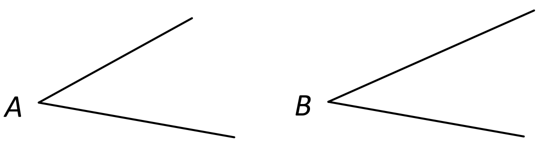
〈小試身手〉下面有一個∠A。請你在直線L上，作出一個 2 倍∠A大小的角。

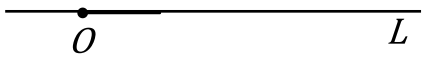




〈小試身手〉請利用尺規作圖的方法，比較∠A和∠B，哪一個角比較大？

(提示：在直線 L 同側分別作∠A和∠B，疊合比較。)





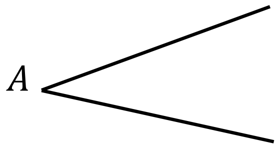
主題二、尺規作圖的兩大絕學

在我們已經學會了一些簡單的尺規作圖技巧後，接下來要學習兩招在尺規作圖中很有用的方法：

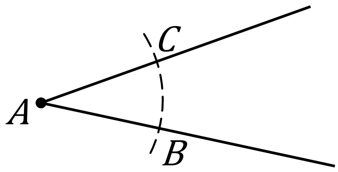
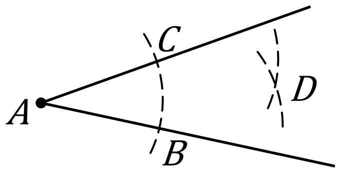
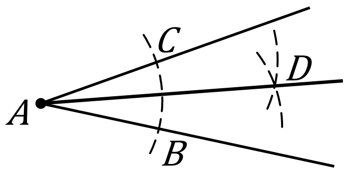
I. 可以把一個角**二等分**的「角平分線」。

II. 可以把一條線段**二等分**且與此線段**垂直**的「中垂線(垂直平分線)」。

一、角平分線



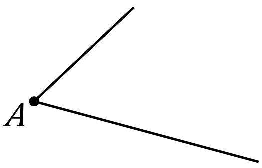
作一條直線將 $\angle A$ 等分成兩個角。

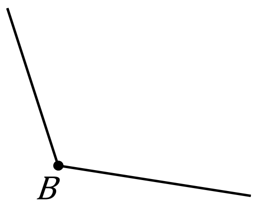
作　法	作　圖
①以點 A 為圓心，取適當長度畫弧，分別與 $\angle A$ 兩邊相交於 B,C 兩點。	
②分別以點 B,C 為圓心，取大於一半 $\overline{BC}$ 的長度為半徑畫弧，兩弧相交於一點 D。	
③畫出 $\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AD}$ 就是 $\angle A$ 的角平分線。 驗證：用量角器量看看。	

※思考(1)：若連起 $\overline{BD}$、$\overline{CD}$，則點 A,B,D,C 所形成的會是什麼形狀？

※思考(2)：若步驟②選取的半徑長恰是 $\overline{AB}$，則在(1)中形成什麼形狀？

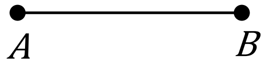
〈小試身手〉請你分別畫出 $\angle A$ 和 $\angle B$ 的角平分線。

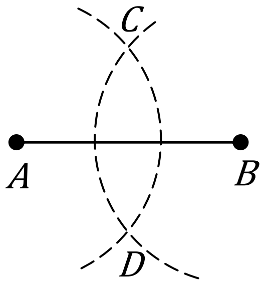
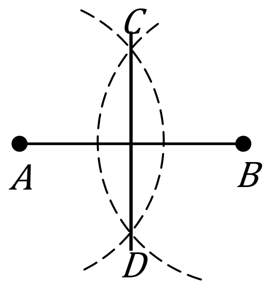




二、中垂線(垂直平分線)

作一條直線將$\overline{AB}$等分，並且和$\overline{AB}$互相垂直。



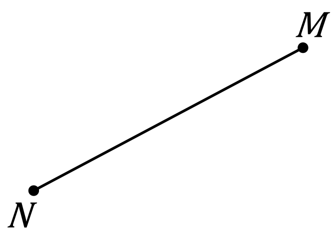
作　法	作　圖
①以點 A 為圓心，取大於一半$\overline{AB}$的長度為半徑畫一個圓弧； 再以點 B 為圓心，以同樣的長度為半徑畫另一個圓弧。 兩個圓弧會相交二個點 C,D。	
②連接$\overleftrightarrow{CD}$就是我們要的直線。	

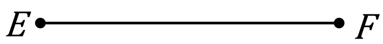
※觀察與驗證：(1)$\overleftrightarrow{CD}$ 與$\overline{AB}$垂直嗎？　(2)$\overleftrightarrow{CD}$與$\overline{AB}$的交點是$\overline{AB}$的中點嗎？

※思考(1)：若連起$\overline{AC}$、$\overline{AD}$、$\overline{BC}$、$\overline{BD}$，則所形成的會是什麼形狀？

※思考(2)：在步驟①，若取**小於或等於**$\frac{1}{2}$ $\overline{AB}$**長為半徑**，有辦法繼續作圖嗎？

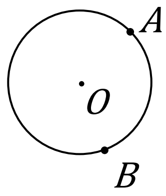
〈小試身手〉請你分別畫出$\overline{EF}$、$\overline{MN}$的中垂線。





問題討論與觀察

〈圖一〉



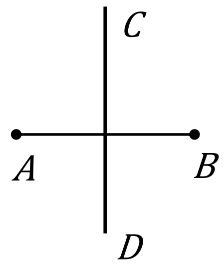
(1) 以點 O 為圓心畫一個圓，圓上有兩個點 A,B，請問：

<a> $\overline{OA}$和這個圓有什麼關係？

<b> $\overline{OA}$和$\overline{OB}$有什麼關係？

<c> 如果在圓上**任意**再選一點 C，則$\overline{OC}$和$\overline{OA}$有什麼關係？

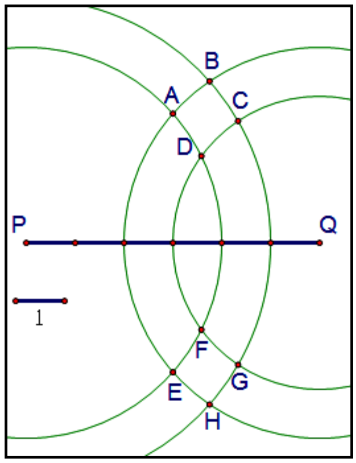
〈圖二〉



(2) 直線$\overleftrightarrow{CD}$是線段$\overline{AB}$的中垂線，請你在$\overleftrightarrow{CD}$上**任意選一點** P，用你所學過的方法測量，$\overline{PA}$和$\overline{PB}$哪一段會比較長？再找另一個點Q，比較$\overline{QA}$和$\overline{QB}$哪一段會比較長？

(3) 承上題，ΔPAB會是一個什麼三角形？

〈圖三〉



左邊是以 P 為圓心，半徑 4 與 5 的圓；
右邊是以 Q 為圓心，半徑 3 與 4 的圓。請問：

(4) $\overline{PA}$的長為________，$\overline{QA}$的長為________。

(5) B、P、H、Q 可為________形的四個頂點。

(6) P、____、Q、____可為菱形的四個頂點。

(7) A、B、…、H 等 8 個點中，
哪些點與 P 點距離 4，且與 Q 點距離 3？

主題三、重獲新生的幾何學

終於了解尺規作圖的規則，以及學到了這些基本的作圖方法。

回到了古希臘，發現數學家們正在利用這套方法繪製各式各樣的圖形，請你協助他們完成這項工作。

《任務一》

如圖，$\overline{AB}$、$\overline{CD}$。分別以點 A,B 為圓心，取$\overline{CD}$為半徑畫弧，設兩弧交於點 P。連起$\overline{PA}$和$\overline{PB}$，得到一個ΔPAB。

≫請作圖並觀察，ΔPAB會是一個什麼樣的三角形？

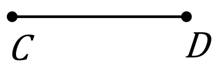
≫如果，數學家們測量出$\overline{AB}=2\text{cm}$、$\overline{CD}=3\text{cm}$，則ΔPAB的周長=？

《任務二》

在完成第一個任務後，數學家們想知道如果改用點 C,D 為圓心，仍以$\overline{CD}$為半徑畫弧，所得到的ΔPCD是個什麼樣的圖形？

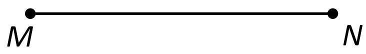
(分別以點 C,D 為圓心，取$\overline{CD}$為半徑畫弧，設兩弧交於點 P。連起$\overline{PC}$和$\overline{PD}$。)

≫請作圖並觀察，ΔPCD會是一個什麼樣的三角形？



《任務三》

數學家們知道，一條線段和其中垂線的交點，會是這條線段的中點。
現在，他們有一條$\overline{MN}$，請你幫忙找出這條線段的中點 P。



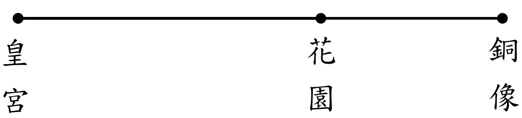
在你完成後，有個數學家再度請託你：找出$\overline{MP}$的中點 Q 和$\overline{PN}$的中點 R。

他想知道$\overline{MQ}$、$\overline{QP}$、$\overline{PR}$、$\overline{RN}$這四段會不會一樣長？
請你用尺規作圖的方法幫他檢驗並且告訴他答案。

此時又有人好奇地跑過來問，$\boldsymbol{\overline{MQ}}$：$\boldsymbol{\overline{QN}}$會是多少？

《任務四》

數學家們跟你說，距離皇宮東方 5 公里的地方有一座漂亮的花園，國王想在皇宮與花園之間立一盞路燈，且此**路燈與皇宮相距 4 公里**，但正煩惱著設計圖還沒有畫好。他們另外找到在花園東方 3 公里處的一個英雄銅像。設計圖的初稿就在這裡，請你幫忙找到這盞路燈豎立的位置。

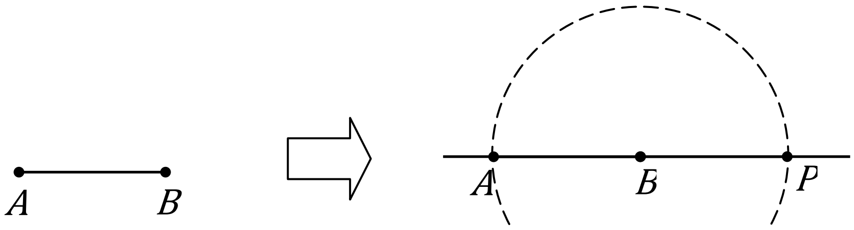


《任務五》

數學家們現在想用尺規作圖方法，畫出一個正方形。

他們已經有了一些想法，請你看著他們的作法，並且幫他們完成。

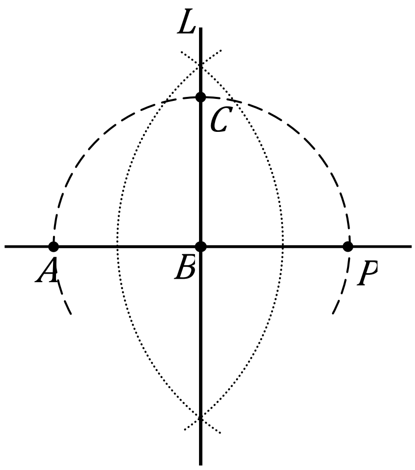
①先畫一個線段$\overline{AB}$，並且將它延伸，找出一個點 P，讓$\overline{BP}=\overline{AB}$。



②因為點 B 是線段$\overline{AP}$的中點，

所以線段$\overline{AP}$的中垂線 L，會過點 B 並且和$\overline{AB}$垂直。

接下來在直線 L 上找一點 C，讓$\overline{BC}=\overline{AB}$。

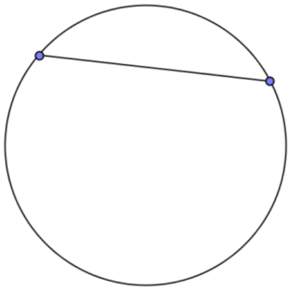


③最後，請繼續完成這個正方形。

《任務六》

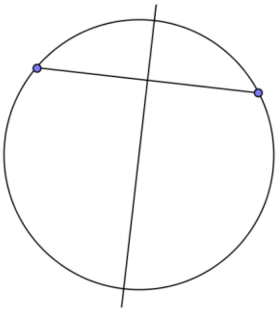
數學家們發現，任意給一個圓，可以用尺規作圖的方法找到它的圓心。
他們是這樣作的：

①先在圓上任意作一條弦。

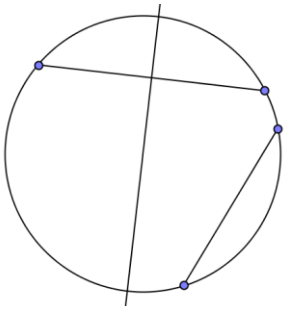


②作出這條弦的中垂線。 (這條中垂線會通過圓心)

因為中垂線上的點到兩端點等距；而圓心到圓上的點也等距。



③再任意作另一條弦，並找出它的中垂線。
這兩條中垂線的交點就是圓心了。



»他們將這份工作進行了一半，請你幫忙繼續完成，找到圓心的位置。

◎有個數學家突然想到另一個方法，他發現②所作出的圖形可以找到一條直徑。那麼**直徑的中點**就是圓心了。

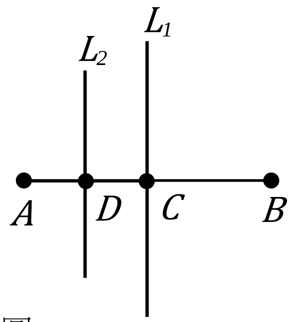
主題四、最後的敬禮

在學習了這麼多的尺規作圖方法後，我們是否了解這些方法所作出的結果，對我們有什麼影響和幫助？請試著挑戰看看。

(1)如圖一，已知$\overline{AB}$。

其中 L_1是$\overline{AB}$的中垂線，L_2是$\overline{AC}$的中垂線。

若$\overline{CD}=3\text{cm}$，則請問$\overline{AB}=$？

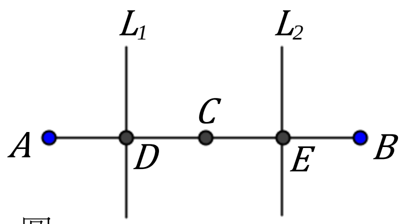


圖一

(2)如圖二，已知$\overline{AB}$，點 C是$\overline{AB}$的中點。

其中 L_1是$\overline{AC}$的中垂線，L_2是$\overline{CB}$的中垂線。

若$\overline{AD}=2\text{cm}$，則請問$\overline{DE}=$？

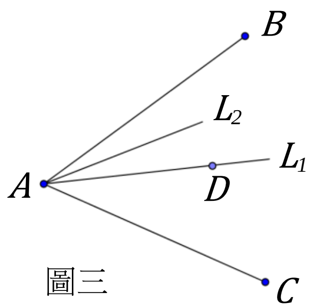


圖二

(3)如圖三，已知$\angle BAC$。

其中 L_1是$\angle BAC$的角平分線，L_2是$\angle BAD$的角平分線。

若$\angle BAC=60°$，則請問 L_1和 L_2的夾角是幾度？



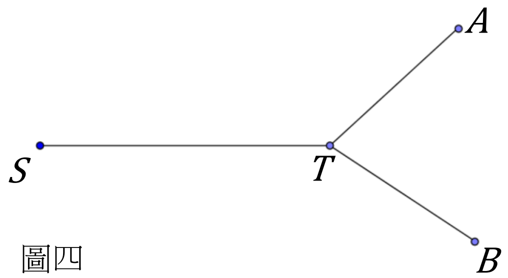
圖三

(4)如圖四，這是一條道路，在點 T是岔路的路口，

有三座城市 S、A、B，其中$\overline{ST}=5$公里、$\overline{TA}=\overline{TB}=3$公里。

今天 S 城的市長想在$\overline{ST}$之間，距離 T處 1 公里的地方，放一個告示牌。

請你利用尺規作圖的方法，找出這個告示牌的**位置**，並且**在圖上標示**。

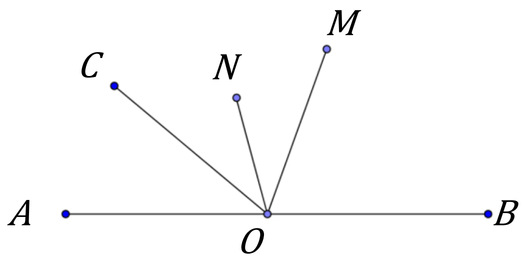


圖四

(5)如圖五，A、O、B 三點成一直線，

作$\overline{OM}$平分$\angle BOC$，再作$\overline{ON}$平分$\angle COM$，

若$\angle BOC=140^\circ$，則$\angle AON=$？



圖五