單元四　尺規作圖

主題一、來自古希臘的挑戰

在很久以前的古希臘，人們非常喜歡研究幾何學。

後來，他們發現許多的幾何圖形都可以只用「**直尺**」和「**圓規**」來畫出，於是就發展出了這一門叫做「尺規作圖」的學問。並且，他們希望可以用<u>最簡單</u>的工具就完成這項工作，於是就有了規定：

I. 直尺只能拿來畫直線，而不能量長度。

II. 圓規可以隨意拉開一個長度畫圓，但是不可以有刻度。

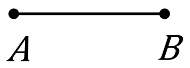
雖然在這樣的條件下好像很困難，但是只用尺規就可以作出的圖形卻遠遠超過我們想像中的多。

先讓我們來練習一些簡單的技巧：

(1)<u>直尺可以做的事</u> (將一條線延長、通過兩點畫出一條直線)

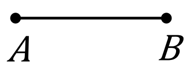
<*a*>將$\overline{AB}$（讀成線段 AB）繼續向兩邊延伸成$\overleftrightarrow{AB}$（讀成直線 AB）。

<*b*>連接點 C 和點 D，畫出$\overleftrightarrow{CD}$。



(2)<u>圓規可以做的事</u> (畫圓、畫圓弧)

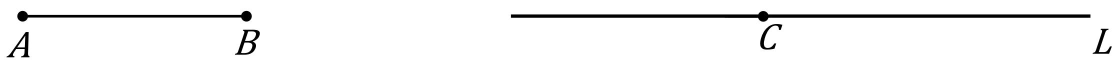
<*a*>以 A 點為圓心， $\overline{AB}$ 為半徑畫一個圓（稱為圓 A）。



(3)<u>圓規可以用來畫一個固定長度</u>

已知$\overline{AB}$與直線 L 上的一點 C，請在直線 L 上找一點 D，讓$\overline{CD}$和$\overline{AB}$的長度一樣。

(小提示：可以找到兩個點，這裡只要選擇其中一個就好。)



(4)已知$\overline{AB}$、$\overline{CD}$，　請先將$\overline{AB}$延長成$\overleftrightarrow{AB}$，

再以點 B 為圓心、$\overline{CD}$為半徑作一個圓 B，這時候圓 B 和$\overleftrightarrow{AB}$會有兩交點。

令圓 B 與$\overleftrightarrow{AB}$的交點為點 E，與$\overleftrightarrow{AB}$的另一個交點為點 F。

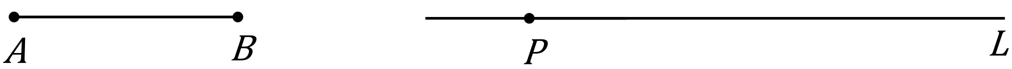
<a>請說明$\boldsymbol{\overline{AE}}$和$\overline{AB}$、$\overline{CD}$有什麼樣的關係？

<b>請說明$\boldsymbol{\overline{AF}}$和$\overline{AB}$、$\overline{CD}$有什麼樣的關係？

(5)已知一個$\overline{AB}$，有一個點 P 在直線 L 上，

請在直線 L 上找出一個點 Q，讓線段$\overline{PQ}$是線段$\overline{AB}$長度的 2 倍。

($\overline{PQ} = 2\overline{AB} = \overline{AB} + \overline{AB}$)



〈小試身手〉如圖，下面有一個直角$\angle O$ 和一條長度是 1 單位的線段，

請你在$\angle$O的一邊找出$\overline{\text{OA}}$，且$\overline{\text{OA}} = 3$；

接下來，請在$\angle$O的另一邊找出$\overline{\text{OB}}$，且$\overline{\text{OB}} = 4$。

請問$\overline{AB}$的長度(也可用尺規量看看)？$\overline{AB}$ =______。

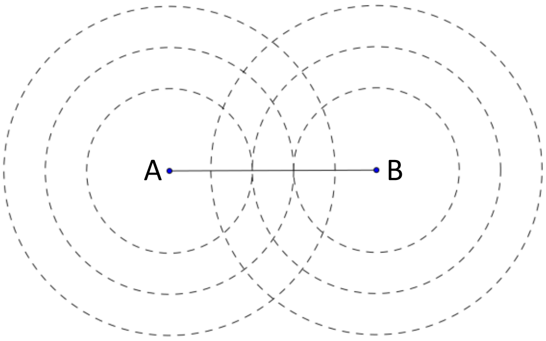
〈小試身手〉如圖，下面有$\overline{\text{AB}}$，

分別以點 A,B 為圓心，半徑取 2、3、4 單位長畫同心圓，

請問：

(1)請你在圖上**標出一點** $\boldsymbol{P}$，使得$\overline{\text{PA}} = 3$且$\overline{\text{PB}} = 4$。

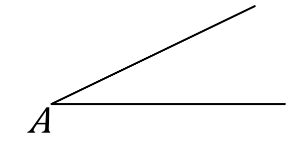
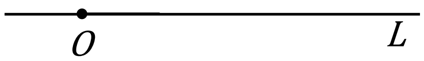
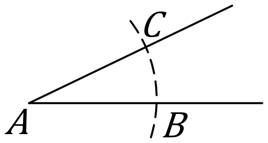
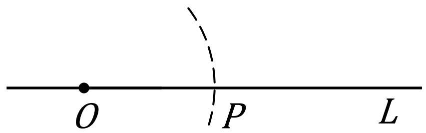
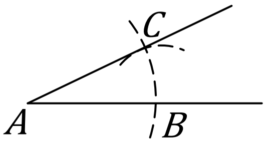
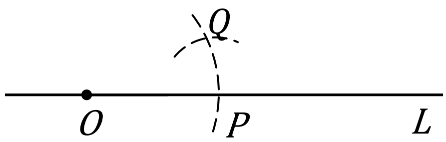
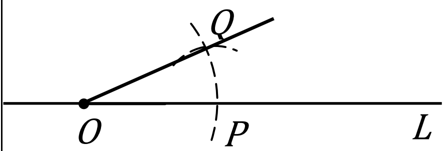
(2)請你觀察，ΔPAB會是一個什麼樣的三角形？



(3)請問，滿足題(1)條件的點會有幾個？

接下來，讓我們來練習關於角度的作圖技巧：

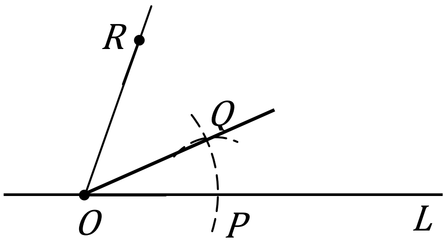
(6)已有一個$\angle A$，再作一個和$\angle A$一樣大的角。

作　法	已知的$\angle A$	作出一個新的角
		
①用尺畫出一條直線 L，再於線上取一點 O。		
②以點 A 為圓心，取適當長度畫圓弧，使此弧與$\angle A$的兩邊相交於 B、C兩點。		
③取同樣長度($\overline{AB}$)為半徑，以點 O 為圓心畫弧，與直線 L 交於點 P。		
④以點 B 為圓心取$\overline{BC}$為半徑畫一弧。		
⑤再以點 P 為圓心，$\overline{BC}$為半徑畫弧，與原本的弧相交點 Q。		
⑥連起$\overline{OQ}$，$\angle QOP$就是所要的角。		

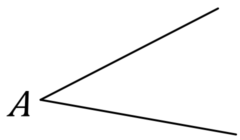
※驗證：請用量角器測量$\angle QOP$是否等於$\angle A$？

※思考：如右圖，若$\angle$QOP＝$\angle$A，

則$\angle$ROQ ＝ $\angle$________ －$\angle$A。

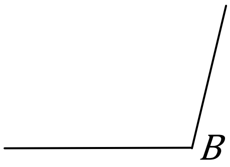


〈小試身手〉



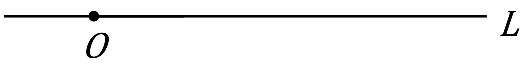
(1)已知∠A與直線 L 上一點 O。

請以 O 為頂點，直線 L 為邊，作∠O，使∠O=∠A。



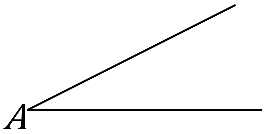
(2)已知∠B。請作一個角與∠B一樣大，並標示為∠DEF。

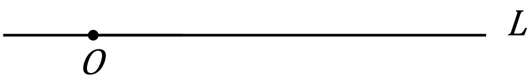
(1)



(2)

〈小試身手〉下面有一個∠A。請你在直線L上，作出一個 2 倍∠A大小的角。





〈小試身手〉請利用尺規作圖的方法，比較∠A和∠B，哪一個角比較大？

(提示：在直線 L 同側分別作∠A和∠B，疊合比較。)