

單元三 平行

主題一 平行線的意義



看到兩條直通通的鐵軌時，你想到哪個數學詞呢？
沒錯！就是平行。

這些都是實景拍攝的照片，照片中筆直如線的兩條鐵軌似乎會在遠處相交，真的會嗎？

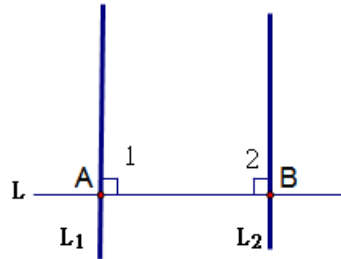


就數學而言，如果同平面上的兩條鐵軌是兩條直線，那麼只要能找出一條同時跟這兩條鐵軌垂直的直線，就稱這兩條鐵軌平行。

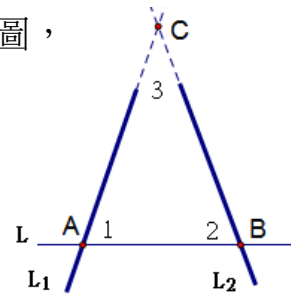
平行線的意義

平面上，與同一直線垂直的兩條直線會相交嗎？

如圖，已知直線 L_1 、 L_2 同時與直線 L 垂直，且與 L 交於 A 、 B 兩點。那麼直線 L_1 與 L_2 會不會相交呢？



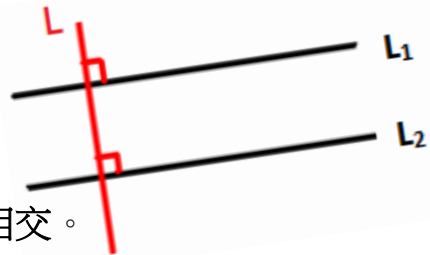
假設直線 L_1 與 L_2 會相交，設交點為 C ，如圖， A 、 B 、 C 成一三角形，得 $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$ ；
 又已知 $\angle 1 + \angle 2 = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ ，
 推得 $\angle 3$ 等於 0° ，這是不可能的，
 因此直線 L_1 與 L_2 不會相交。



所以，平面上，與同一直線垂直的兩條直線永不相交。

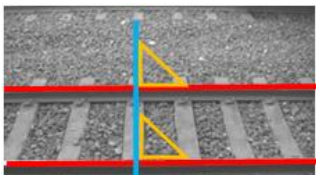

在同一平面上，若兩直線能找到一條共同的垂直線，我們就稱這兩直線互相平行。

如圖，直線 L_1 、 L_2 同時與直線 L 垂直，則 L_1 與 L_2 平行，記作「 $L_1 // L_2$ 」，讀作「 L_1 平行於 L_2 」。



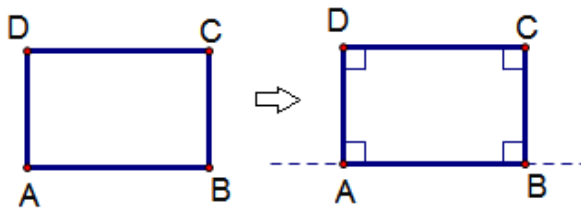
由前面的討論可知，平行的兩直線永不相交。

鐵軌看似相交，那是視線對於遠近距離造成的錯覺，其實它們永不相交！”

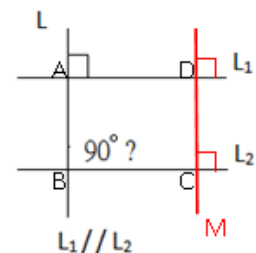
平行線小討論

討論 1. 長方形的對邊平行嗎?



- (1) 如圖，長方形 ABCD 的內角都是幾度？
- (2) \overline{DA} 、 \overline{CB} 都與 \overline{AB} 垂直嗎？ \overline{DA} 與 \overline{CB} 是否平行？
- (3) \overline{DC} 與 \overline{AB} 是否平行？ 為什麼？
- (4) 由(2)、(3)的結果，長方形的對邊會平行嗎？

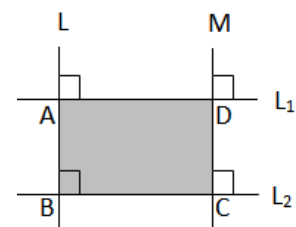
討論 2. 如圖， $L_1 // L_2$ ，且 L_1 、 L_2 都垂直於直線 M ，若直線 L 與 L_1 垂直，則 L 也會與 L_2 垂直嗎？



- (1) 四邊形 ABCD 中的內角和是幾度？
- (2) $\angle ABC$ 等於幾度？
- (3) L 與 L_2 垂直嗎？

由上可得在平面上，若 $L_1 // L_2$ ，則垂直 L_1 的直線，也會與 L_2 垂直。

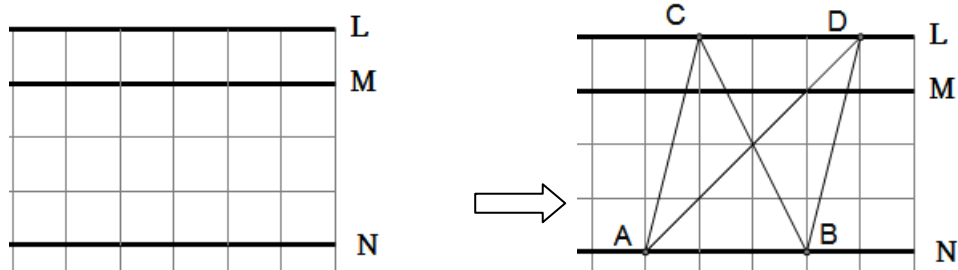
再者，四邊形 ABCD 為長方形，因此對邊等長，所以 $\overline{AB} = \overline{CD}$ ，可知兩平行線間的垂直線段都等長，我們稱此垂直線段長為其兩平行線間的距離。因此



兩平行線間的距離處處相等!!!

牛刀小試

1. 如圖，小方格的邊長是 1，沿著方格邊緣畫出直線 L、M、N，試問：

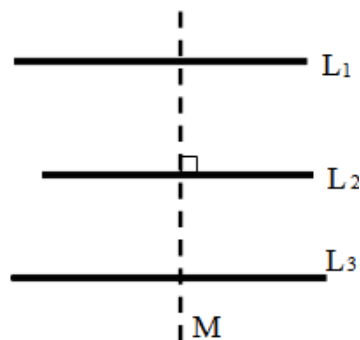


- (1) 直線 L、M 是否平行？ 如果平行，那麼它們的距離是多少？
- (2) 直線 L、N 是否平行？ 如果平行，那麼它們的距離是多少？
- (3) 上圖中，A、B 同在哪一條直線上？ C、D 同在哪一條直線上？
- (4) 上圖中， $\triangle ABC$ 與 $\triangle ABD$ 的面積是否相等？為什麼？
(提示：三角形面積 = $\frac{1}{2} \times \text{底} \times \text{高}$)
- (5) 上圖中，請在直線 L 上任意取一點 E，並畫出 $\triangle ABE$ ，
那麼 $\triangle ABE$ 與 $\triangle ABC$ 的面積是否相等？為什麼？

2. 下列 a、b、c、d 等 4 個敘述是帥儒為說明

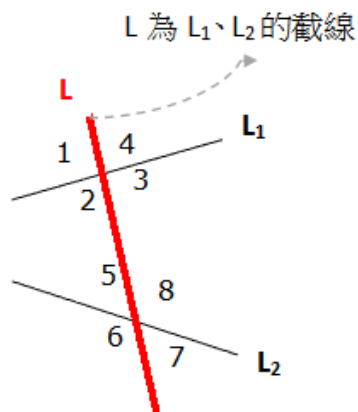
「若 $L_1 // L_2$ ， $L_2 // L_3$ ，則 $L_1 // L_3$ 。」所寫的推導內容，請寫出正確的推導順序。(註：有兩種順序排列都可成為答案，寫出一種即可。)

- a. 因為 $L_1 // L_2$ ，且 $M \perp L_2$ ，所以 $M \perp L_1$ 。
- b. 畫一直線 M，且 $M \perp L_2$ 。
- c. 因為 $M \perp L_1$ 、 $M \perp L_3$ ，所以 $L_1 // L_3$ 。
- d. 因為 $L_2 // L_3$ ，且 $M \perp L_2$ ，所以 $M \perp L_3$ 。

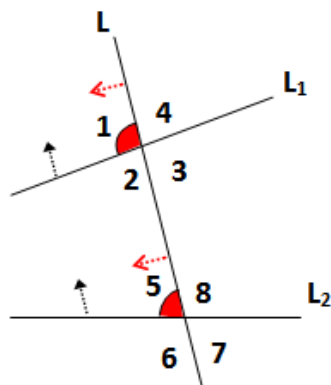
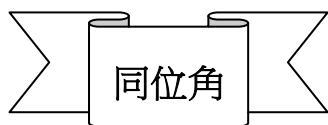


答： → → 。

主題二 截線與截角



平面上，若 L 同時與 L_1 、 L_2 相交於相異兩點，則稱 L 為 L_1 、 L_2 的截線，所形成的 8 個角稱為截角，如圖中的 $\angle 1$ 、 $\angle 2$ 、……、 $\angle 8$ 。



$\angle 1$ 與 $\angle 5$ 都在截線左方，分別在 L_1 、 L_2 上方，對應位置一樣，稱為同位角。

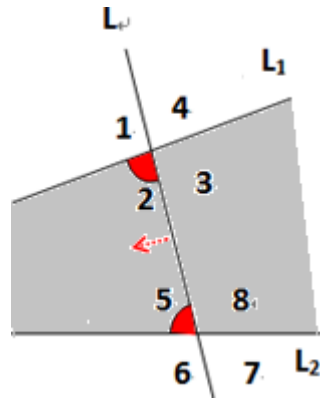
* 請找出另外三組同位角：

答：_____和_____都在截線左方，分別在 L_1 、 L_2 下方；

_____和_____都在截線右方，分別在 L_1 、 L_2 上方；

_____和_____都在截線右方，分別在 L_1 、 L_2 下方。

同側內角

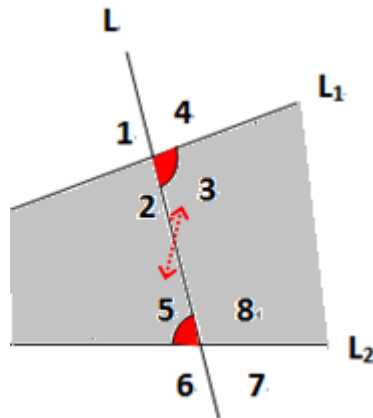


◎ $\angle 2$ 、 $\angle 5$ 都在截線的左側，並且在 L_1 、 L_2 內側，稱為 同側內角。

* 請找出另外一組同側內角：

答：_____和_____都在截線的右側，並且在 L_1 、 L_2 內側。

內錯角



◎ $\angle 3$ 、 $\angle 5$ 都在 L_1 、 L_2 內側，且交錯在截線兩側，稱為 內錯角。

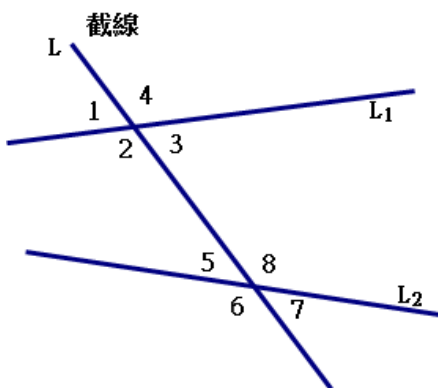
* 請找出另外一組內錯角：

答：_____和_____都在 L_1 、 L_2 內側，且交錯在截線兩側。

牛刀小試

如圖，填填看！

1.

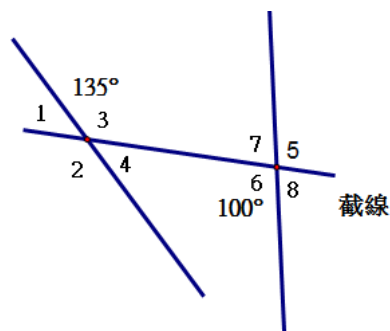


一定要會辨識同位角、
內錯角、同側內角哦!!

- ∠2 的同位角為_____
- ∠3 的內錯角為_____
- ∠8 的同位角為_____
- ∠5 的同側內角為_____
- ∠2、∠8 為_____角
- ∠1、∠5 為_____角
- ∠3、∠8 為_____角
- ∠3、∠7 為_____角

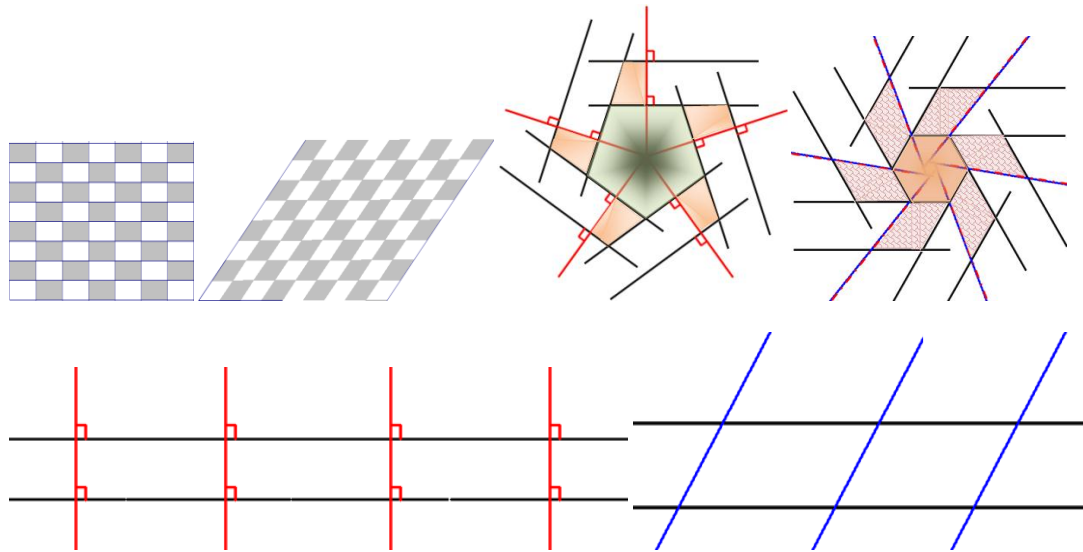
2.

- (1) 找出∠1 的同位角？ 此角幾度？
- (2) 找出∠7 的內錯角？ 此角幾度？
- (3) 找出∠4 的同側內角？ 此角幾度？
- (4) 找出∠8 的對頂角？ 此角幾度？
- (5) 找出∠2 的所有補角？ 各是幾度？
- (6) 找出∠5 的同位角？ 再找出此角的內錯角？



主題三 平行線的截角性質

一截線將平行線截成的同位角、內錯角、同側內角各有什麼特性呢？



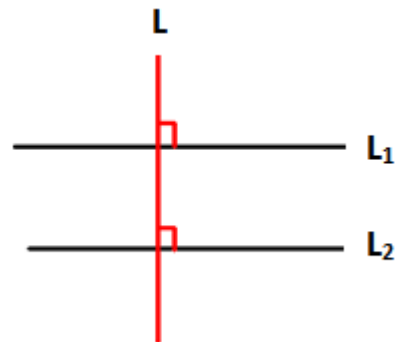
*請就你的觀察，填填看：(填“相等”、“互補”或“相等且互補”)

(1) $L_1 // L_2$ ，當截線 L 垂直 L_1 、 L_2 時：

同位角會_____、

內錯角會_____、

同側內角會_____。

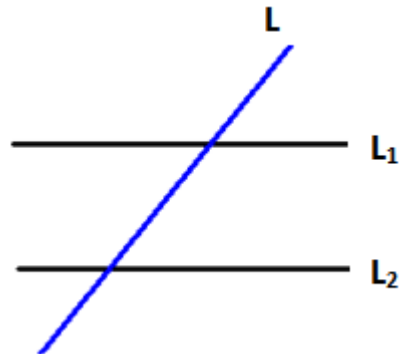


(2) $L_1 // L_2$ ，當截線 L 不垂直 L_1 、 L_2 時：

同位角會_____、

內錯角會_____、

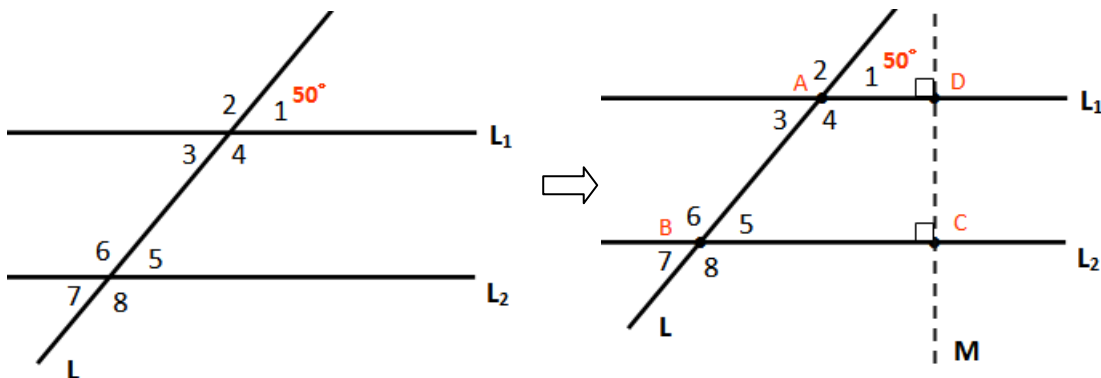
同側內角會_____。



真正的平行之旅啟程囉！

活動 1 平行線的截角探討一

如左圖， $L_1 // L_2$ ，其中 $\angle 1 = 50^\circ$ ，那麼截角 $\angle 1 \sim \angle 8$ 有何關係呢？填填看！



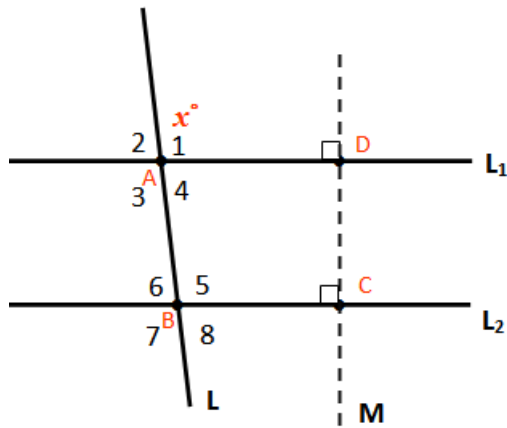
- (1) 因 $L_1 // L_2$ ，所以可畫一直線 M 同時垂直於 L_1 、 L_2 ，如右圖。
- (2) $\angle 1 = 50^\circ$ ，所以 $\angle 2 = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$ ， $\angle 3 = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$ ， $\angle 4 = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$ 。
- (3) 四邊形 $ABCD$ 中， $\angle 5 = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - \angle 4 = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$ ，
所以 $\angle 6 = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$ ， $\angle 7 = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$ ， $\angle 8 = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$ 。

(4) 記錄與歸納

同位角(4 組)	內錯角(2 組)	同側內角(2 組)
$\angle 1 = 50^\circ$ 與 $\angle 5 = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$	<u> </u> 與 <u> </u>	<u> </u> 與 <u> </u>
$\angle 2 = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$ 與 <u> </u>	<u> </u> 與 <u> </u>	<u> </u> 與 <u> </u>
$\angle 3 = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$ 與 <u> </u>		
$\angle 4 = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$ 與 <u> </u>		
同位角角度關係 <u> </u>	內錯角角度關係 <u> </u>	同側內角角度關係 <u> </u>

活動 2 平行線的截角探討二

如圖， $L_1 // L_2$ ， $\angle 1 = x^\circ$ 。因 $L_1 // L_2$ ，所以可畫直線 M 同時垂直於 L_1 、 L_2 。截角 $\angle 1 \sim \angle 8$ 的有何關係呢？填填看！



- (1) $\angle 1 = x^\circ$ ，所以 $\angle 2 = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$ ， $\angle 3 = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$ ， $\angle 4 = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$ 。
- (2) 四邊形 $ABCD$ 中， $\angle 5 = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - \angle 4 = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$ (請老師指導學生將答案化簡)，所以 $\angle 6 = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$ ， $\angle 7 = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$ ， $\angle 8 = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$ 。
- (3) 它們的同位角有何關係？內錯角有何關係？同側內角有何關係？

從活動 1、活動 2 我們發現：

平行線的截線性質：

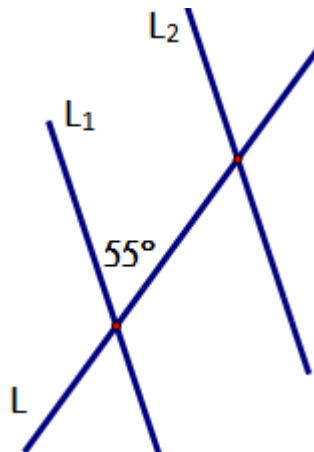
如果兩條直線平行，且被一條直線所截，則：

- (1) 每一組 同位角相等
- (2) 每一組 內錯角相等
- (3) 每一組 同側內角互補

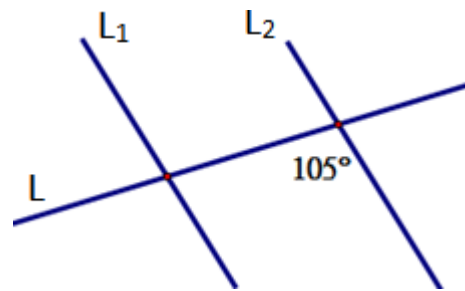
牛刀小試

1. 下列各題中， $L_1 \parallel L_2$ ， L 為其截線。已知一截角的角度，請在圖的適當位置寫出其餘的截角度數。

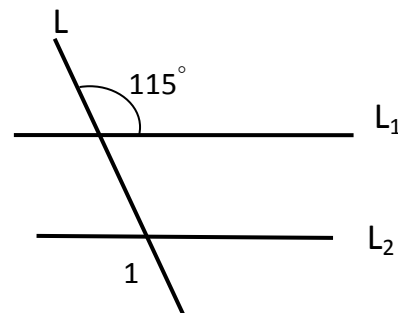
(1)



(2)

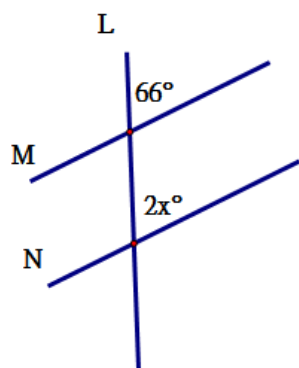


2. 如圖， L_1 與 L_2 平行，請問 $\angle 1$ 幾度？

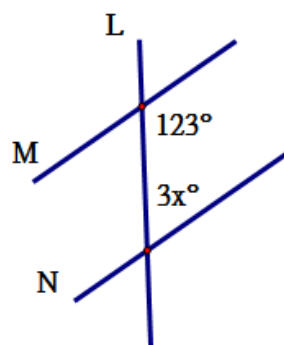


3. 下列各題中， $M \parallel N$ ，請算出 x 的值。

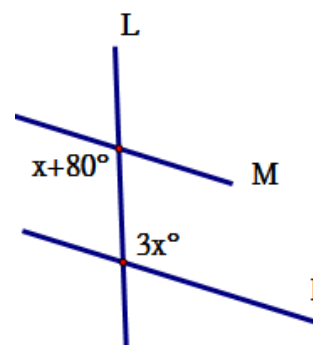
(1)



(2)

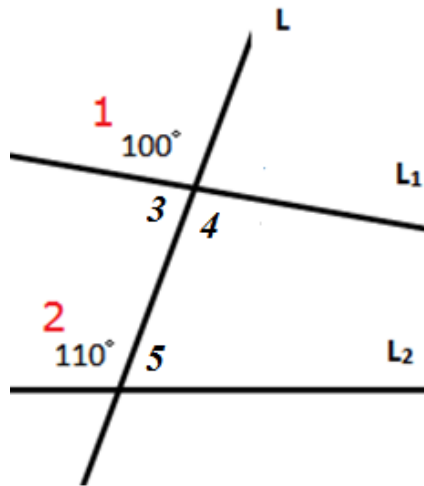


(3)



主題四 截角與平行線的判別

從主題三我們知道，兩平行線被一直線所截的同位角相等、內錯角相等、同側內角互補。因此，若兩直線不符合平行線的截線性質，則這兩直線不會平行。例如下圖中的 $\angle 1$ 、 $\angle 2$ 為 L_1 、 L_2 的同位角，但不相等，不符合平行線的截線性質，所以 L_1 、 L_2 不平行。



換你說說看

1. 請試著從上圖中找出一組內錯角，再以它們的角度關係說明 L_1 、 L_2 不平行。

解：一組內錯角： \angle _____ $=$ _____ $^\circ$ 與 \angle _____ $=$ _____ $^\circ$ ；

此組內錯角的關係：_____；

不符合平行線的截線性質，所以_____。

2. 請試著從圖中找出一組同側內角，再以它們的角度關係說明 L_1 、 L_2 不平行。

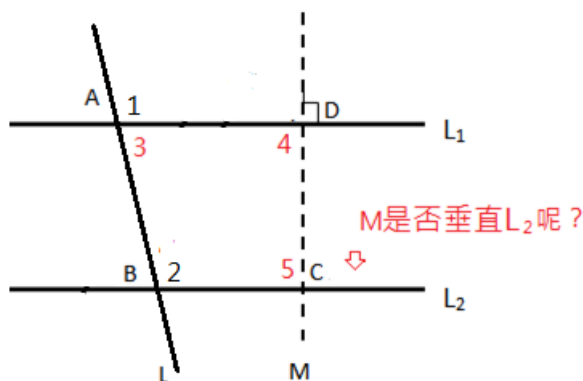
解：

想一想：若其中一組同位角相等，那麼這兩條直線是否平行呢？

活動 3

1. 同位角與平行線的判別

如圖， L 為 L_1 、 L_2 的截線，且同位角 $\angle 1 = \angle 2$ ， $M \perp L_1$ ，則直線 M 是否也垂直 L_2 呢？填填看：



(1) $\angle 1 = \angle 2$ ，且 $\angle 1 + \angle 3 =$ _____ 度，所以 $\angle 2 + \angle 3 =$ _____ 度；

(2) 直線 M 垂直 L_1 ，所以 $\angle 4 =$ _____ 度；

(3) 四邊形 $ABCD$ 內角和 $\angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 =$ _____ 度，

所以 $\angle 5 =$ _____ 度；

(4) M 是否也垂直 L_2 呢？ L_1 、 L_2 是否平行？為什麼？

2. 數字算算看

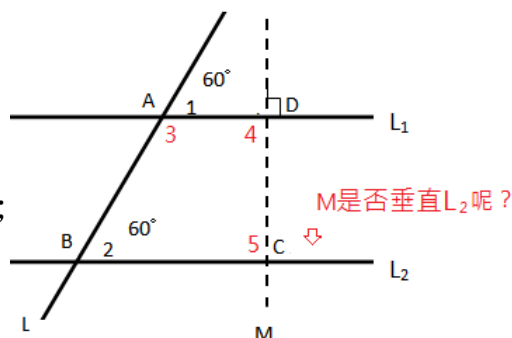
如圖，同位角 $\angle 1 = \angle 2 = 60^\circ$ ， $M \perp L_1$ ，則直線 M 是否也垂直 L_2 呢？填填看：

(1) $\angle 2 + \angle 3 =$ _____ 度， $\angle 4 =$ _____ 度；

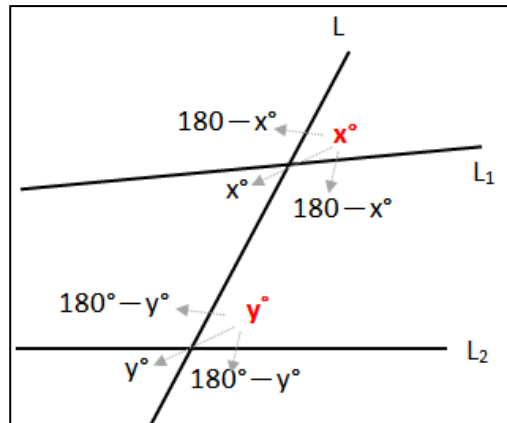
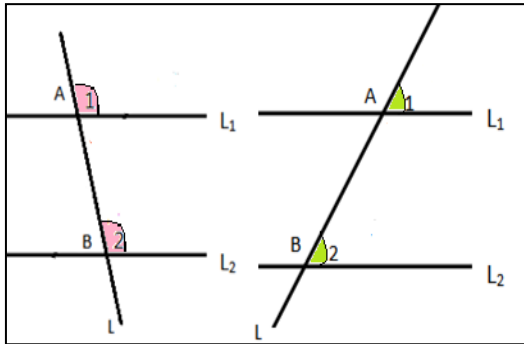
(2) 四邊形 $ABCD$ 內角和

$\angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 =$ _____ 度，所以 $\angle 5 =$ _____ 度；

(3) M 是否也垂直 L_2 呢？ L_1 、 L_2 是否平行？



從活動 3 知道，當左圖中的同位角 $\angle 1 = \angle 2$ 時， L_1 與 L_2 平行。



右圖， L 為 L_1 、 L_2 的截線，一組同位角設成 x° 與 y° ，則利用「對頂角相等、鄰角互補」等性質，可以推導出其他截角的表示法(如圖)。若已知任何一組同位角相等，則 x 與 y 就會相等，因而其他的同位角也會相等，包括活動 3 中的同位角也相等，所以兩直線就會平行。由此可知：

若兩直線被一截線所截，且有一組同位角相等，則這兩直線平行。

另外，任一組內錯角相等，也可推得 $x = y$ ；任一組同側內角互補也可以得到 $x = y$ (請一一檢驗)。因為 $x = y$ ，就出現同位角相等，所以兩直線也會平行!!!!!!

結論如下：

兩直線被一截線所截，若

(1)有一組同位角相等
或(2)有一組內錯角相等
或(3)有一組同側內角互補

則這兩條直線必平行

牛刀小試

1. 請根據圖中的數據判斷，直線 M 與直線 N 是否平行，並說明理由。

<p>∵ 同位角相等， ∴ 平行。</p>		

2. 請根據圖中的數據判斷，直線 M 與直線 N 是否平行。

主題五 綜合練習

重要概念練習

一.是非題：

- () 1. 平面上，與同一直線垂直的兩條直線永不相交。
- () 2. 平面上，與同一直線垂直的兩條直線也會互相垂直。
- () 3. 平面上，與同一直線垂直的兩條直線會互相平行。
- () 4. 平面上三相異直線 L_1 、 L_2 、 L_3 ，若 $L_1 \parallel L_2$ 且 $L \perp L_1$ ，則 $L \perp L_2$ 。
- () 5. 平面上三相異直線 L_1 、 L_2 、 L_3 ，若 $L_1 \parallel L_2$ 且 $L_1 \parallel L_3$ ，則 $L_2 \parallel L_3$ 。

二.填充題：

1. 若兩條平行線被一直線所截，則：

同位角_____、內錯角_____、同側內角_____。

2. 兩直線被一截線所截，(1)若同_____，則這兩直線平行；

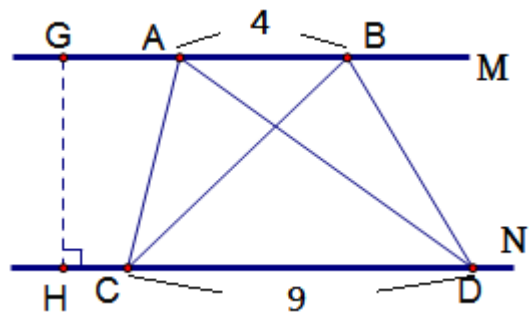
(2)若內_____，則這兩直線平行；

(3)若同_____，則這兩直線平行。

3. 如圖，直線 $M \parallel N$ ， \overline{GH} 垂直於直線 N ， $\overline{AB} = 4$ ， $\overline{CD} = 9$ ，

$\triangle ACD$ 面積為 27，則

- (1) $\overline{GH} =$ _____，
- (2) $\triangle ABC$ 面積為 _____，
- (3) $\triangle ABD$ 面積為 _____，
- (4) $\triangle BCD$ 面積為 _____。



實力練習

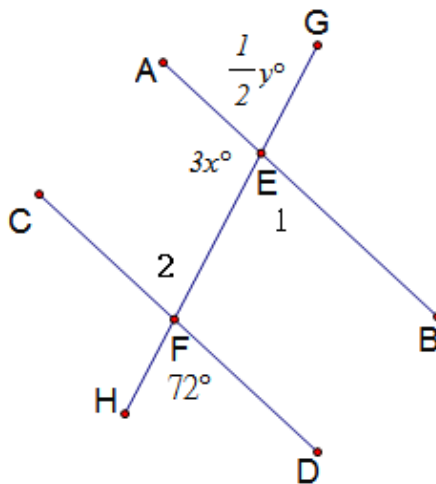
恭喜完成平行之旅！假如還意猶未盡，就加碼！

1. 如圖， $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ，則：

(1) $\angle 1 = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$ ， $\angle 2 = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$ ；

(2) $3x = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $x = \underline{\hspace{2cm}}$ ；

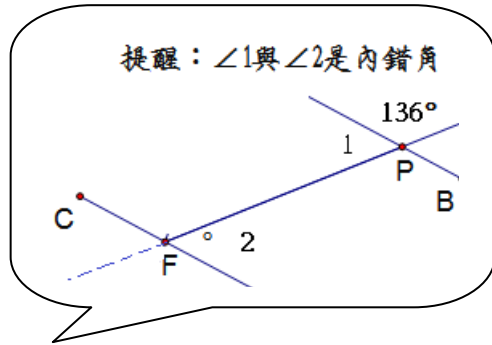
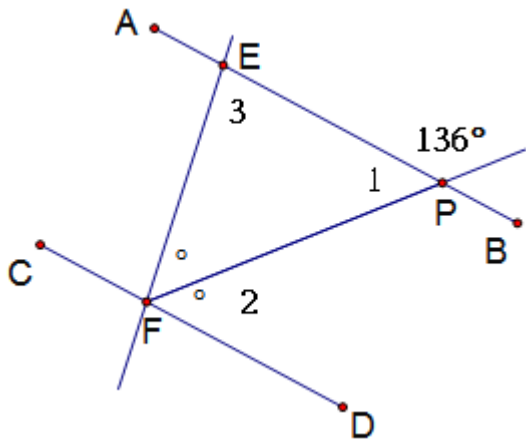
(3) $\frac{1}{2}y = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $y = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$ 。



2. 如圖， $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ，則：

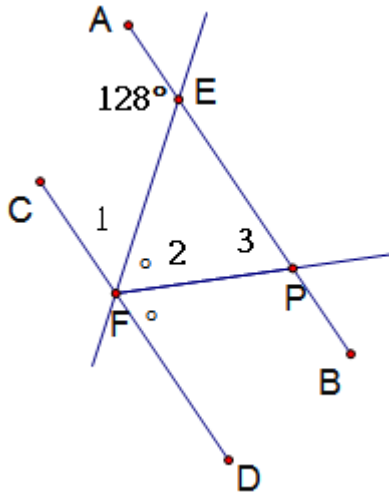
<p>(1)</p> <p>$\angle EFD = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$</p>	<p>(2)</p> <p>若\overline{FW}平分$\angle EFD$，</p> <p>$\angle EFW = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$，</p> <p>$\angle WFD = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$</p>	<p>(3)</p> <p>$\angle 1 = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$</p>
--	--	--

3. 如圖， $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ， \overline{FP} 平分 $\angle EFD$ ，則：



$\angle 1 = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$ ， $\angle 2 = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$ ， $\angle 3 = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$ 。

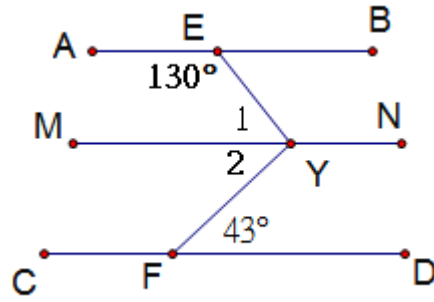
4. 如圖， $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ， \overline{FP} 平分 $\angle EFD$ ，則：



$\angle 1 = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$ ， $\angle 2 = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$ ， $\angle 3 = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$ 。

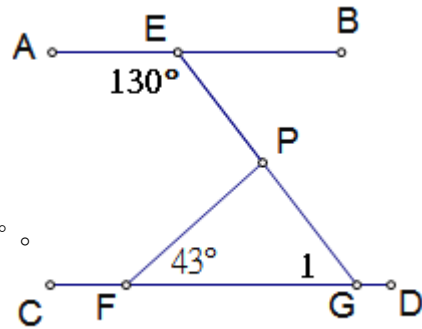
5. 如圖， $\overline{AB} // \overline{MN} // \overline{CD}$ ，則：

- (1) $\angle 1 =$ _____ $^{\circ}$ ；
 (2) $\angle 2 =$ _____ $^{\circ}$ ；
 (3) $\angle EYF =$ _____ $^{\circ}$ 。

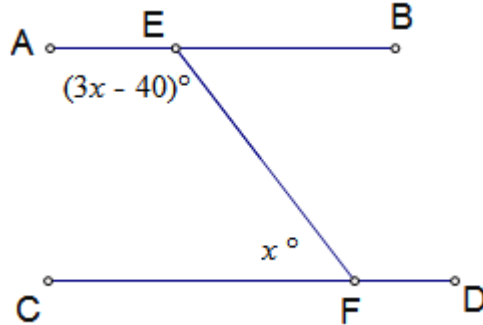


6. 如圖， $\overline{AB} // \overline{CD}$ 。則：

- (1) $\angle 1 =$ _____ $^{\circ}$ ；
 (2) $\triangle PFG$ 的外角 $\angle EPF =$ _____ $^{\circ}$ 。



7. 如圖所示，當 x 等於多少時， \overline{AB} 與 \overline{CD} 平行。



8. 如圖所示，當 x 等於多少時， \overline{AD} 與 \overline{BC} 平行。

