

單元一 等差數列與等差級數

主題一 數列

一、生活中的數列

範例 1 大樂透號碼



大樂透號碼 07,22,27,30,41,46

像這樣將數字排成一列，無論有規律、沒規律或重複出現都叫做數列。

觀念一點通：

在數列中的每一個數字成為項，第一個數字稱為第 1 項或是首項，第二個數字稱為第 2 項，……，最後一個數字稱為末項。

其中，首項記為： a_1 第 2 項記為： a_2 末項記為： a_n

上面的例子中：

首項 a_1 = _____，第 2 項 a_2 = _____，末項 a_n = _____

練習 1.1 抓餅價目表

抓餅 價目表	
原味	20 元
原味加蛋	25 元
蔬菜蛋	30 元
玉米蛋	35 元
火腿蛋	35 元
雙層起司總匯	59 元

抓餅的價目表 20,25,30,35,35,59

想想看，這也是數列嗎？答：_____

有沒有甚麼規律？答：_____

練習 1.2 身高量尺



身高量尺
 160,150,140,130,120,110,100,90,80,70
 想想看，這也是數列嗎？ 答：_____。
 有沒有甚麼規律？ 答：_____。

牛刀小試

1. 觀察下圖




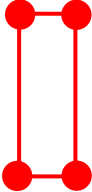
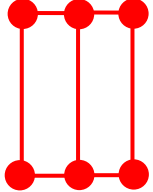
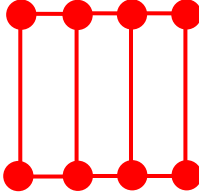
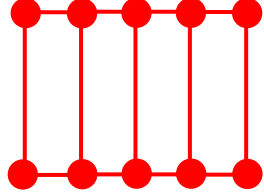
列出你看到的數列，並寫出首項、第 2 項、末項為何？

2. 試舉出生活中數列的例子

二、等差數列：



將長方形  個數
與交點個數，記錄
下來並轉化成數列

長方形個數	1	2		
交點個數	4			
圖形				

可得以下關係：

$$a_1 = 4$$

$$a_2 = 6 = a_1 + 2$$

$$a_3 = 8 = a_2 + 2$$

$$a_4 = 10 = a_3 + 2$$

...

我們發現其中任意相鄰的兩項，_____都等於 2


例如：

$$a_2 - a_1 = 6 - 4 = 2$$

$$a_3 - a_2 = 8 - 6 = 2$$

觀念一點通：

由交點個數所形成的數列 $4, 6, 8, 10$



像這樣任意相鄰的兩項，後項減去前項都一樣的數列，稱為等差數列且以 $\langle a_n \rangle$ 表示，而這個差稱為公差。

想想看

我們看過的例子裡，有哪些是等差數列？

範例 2: 撲克牌 1,2,3,4,5,6,7

是等差數列嗎？如果是，公差是多少呢？

解：因為此數列任意相鄰的兩項，後項減去前項都為 1，

所以，是等差數列，且公差為 1

練習 2.1: 大樂透號碼 07,22,27,30,41,46

是等差數列嗎？如果是，公差是多少呢？

練習 2.2: 身高量尺 160,150,140,130,120,110,100,90,80,70

是等差數列嗎？如果是，公差是多少呢？

<動動腦>

像 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3 這樣的數列，

是等差數列嗎？ 如果是，公差是多少呢？

牛刀小試

一、

觀察下列數列的規律，填入適當的數字並回答問題

1. 3, 7, 11, 15, 19, _____, _____

Q: 不是 是 (公差=_____) 等差數列

2. 13, 11, 9, 7, _____, _____

Q: 不是 是 (公差=_____) 等差數列

3. 1, 2, 4, 8, 16, _____, _____

Q: 不是 是 (公差=_____) 等差數列

4. 2, 1, 3, 2, 1, 3, 2, 1, _____, 2, _____, 3

Q: 不是 是 (公差=_____) 等差數列

5. 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, _____, _____

Q: 不是 是 (公差=_____) 等差數列

6. -1, 10, -3, 100, -5, 1000, -7, 10000, _____, _____

Q: 不是 是 (公差=_____) 等差數列

7. _____, $a-3$, a , $a+3$, $a+6$, $a+9$, _____

Q: 不是 是 (公差=_____) 等差數列

8. _____, a , a , a , a , _____

Q: 不是 是 (公差=_____) 等差數列

自我檢視表:

1. 我能看出規律，並能將正確的數字填入數列 是 否

2. 我會判斷一個數列是否為等差數列 是 否

3. 我知道等差數列的公差為多少 是 否

二、算算看多少錢

1 以下是台中地區日間時間(早上 6 點~晚上 10 點)的計程車計費表

里程	1.5km 內	1.75km	2km	2.25km	2.5km	2.75km	3km
車資	85 元	90 元	95 元	100 元	105 元	110 元	115 元

(1)由車資所列出的數列是等差數列嗎? 如果是, 公差是多少呢?

(2)小之搭計程車回家, 到家時計程車上的表顯示為 4km, 請問他要付多少錢給司機呢?

2 以下是小之本週的記帳表

	週一	週二	週三	週四	週五	週六	週日
花費(元)	200	200	200	200	200	200	200
剩餘(元)	1300	1100	900	700	500	300	?

(1)如果小之一個禮拜的零用錢是 1500 元, 每天固定花 200 元, 請問小之過一個禮拜後, 剩下多少零用錢?

(2)由每日剩餘的錢所列出的數列是等差數列嗎? 如果是, 公差是多少呢?

觀念一點通:

公差的值可以為正, 可以為負, 可以為 0, 事實上, 公差可以是任意實數。

- 公差為正時: 數列的值依序遞增
- 公差為負時: 數列的值依序遞減
- 公差為 0 時: 各項維持不變

主題二 等差數列的一般項

活動一 每人有 1~10 號的號碼卡片各一張

步驟一: 請把有數字那面朝下, 打散後任意抽取卡片, 翻開且擺在
<表一>的首項與公差的欄位上。

步驟二: 計算由此首項及公差形成的等差數列, 第 3 項的值為何

步驟三: 重複步驟一到步驟二共 3 次, 並將結果記錄在<表二>

<表一>

首項	公差	第 3 項
例: <div style="border: 1px solid black; width: 40px; height: 40px; display: flex; align-items: center; justify-content: center; margin: 0 auto;">2</div>	<div style="border: 1px solid black; width: 40px; height: 40px; display: flex; align-items: center; justify-content: center; margin: 0 auto;">5</div>	12

<表二>

首項	公差	第 3 項	計算過程
例: 2	5	12	$2+5+5=12$

同樣的遊戲規則, 若改為計算第 5 項之值, 請完成<表三>

<表三>

首項	公差	第 5 項	計算過程
例: 2	5	22	$2+5+5+5+5=22$

--	--	--	--

活動二: 由老師隨機從 1~10 號抽出 3 張卡片, 分別擺在下表三個位置

首項	公差	第 10 項
例: 2	5	?

請同學舉手搶答, 表格中的 ” ? ” 應是何值?

並將結果記錄下來

首項	公差	第 項
 	 	
首項	公差	第 項
 	 	
首項	公差	第 項
 	 	

<思考>

有沒有什麼比較快速的方法能處理這個問題呢？

我們將這個問題用數學的表示法寫下來，

公差 $d = 5$

首項 $a_1 = 2$

第 2 項 $a_2 = 2 + 1 \times 5 = 7$

第 3 項 $a_3 = 2 + 2 \times 5 = 12$

第 4 項 $a_4 = 2 + 3 \times 5 = 17$

第 5 項 $a_5 = 2 + 4 \times 5 = 22$

...

第 n 項 $a_n = 2 + (n-1) \times 5$

故若 $n=10$ 則 $a_{10} = 2 + (10-1) \times 5$

$$= 2 + 9 \times 5$$

$$= 47$$

觀念一點通：

公差 d

首項 a_1

第 2 項 $a_2 = a_1 + 1 \times d = a_1 + (2-1) \times d$

第 3 項 $a_3 = a_1 + 2 \times d = a_1 + (3-1) \times d$

第 4 項 $a_4 = a_1 + 3 \times d = a_1 + (4-1) \times d$

第 5 項 $a_5 = a_1 + 4 \times d = a_1 + (5-1) \times d$

...

第 n 項 $a_n = a_1 + (n-1) \times d$

<數學溝通橋---小遊戲>

同學回家可仿照上述遊戲規則，一副撲克牌，兩人比賽，輪流抽三張牌，分別代表**首項**、**公差**及所形成的等差數列**第某項**的值，先把答案回答出來的人，能拿回三張牌，待 52 張牌都抽完，由擁有牌數最多的人獲勝。

在上面的活動，我們的號碼卡片是從 1~10 號，這些號碼都是正的
<動動腦>首項、公差、項數可以是怎樣的數字，連連看

首項 ●	● 正數
公差 ●	● 0
項數 ●	● 負數

牛刀小試

1. 設一等差數列的首項為 -2 ，公差為 5 ，
則此數列的第 3 項為_____
2. 設一等差數列的首項為 2 ，公差為 -5 ，
則此數列的第 3 項為_____
3. 設一等差數列的首項為 -2 ，公差為 -5 ，
則此數列的第 3 項為_____
4. 已知一等差數列 $1, 4, 7, 10, 13, \dots$ ，
則此數列的第 n 項為_____
5. 已知一等差數列 $-5, -2, 1, 4, 7, \dots$ ，
則此數列的第 n 項為_____
6. 設一等差數列的首項為 2 ，公差為 5 ，
則此數列的第 100 項為_____

觀念一點通：

如果一個數列總共有 n 項，首項為 a_1 ，末項為 a_n ，公差為 d

則 n 稱為這個數列的項數，

$a_n = a_1 + (n-1) \times d$ 則稱為此數列的一般項

主題三 等差級數**一、級數**

範例 3: 下表是麻糬專賣店的價目表

麻糬 價目表	
芝麻	10 元
花生	10 元
抹茶紅豆	15 元
楓漿	15 元
酒釀	15 元
養生炭	20 元

由麻糬的價目表形成的數列為

10, 10, 15, 15, 15, 20

若各種口味都想買一個來吃吃看，

則總共要付多少錢？

解：

$10+10+15+15+15+20 = 85$ 元

觀念一點通：

將一個數列的各項依次用「+」號連接起來，就稱為一個級數。

如上例： $\left\{ \begin{array}{l} 10, 10, 15, 15, 15, 20 \text{ 是一個數列} \\ 10 + 10 + 15 + 15 + 15 + 20 \text{ 是一個級數} \end{array} \right.$

$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow$
 首 第 ... 末
 項 2 項
 項

範例 4: 下表是小華的背單字進度表

星期	單字數
星期一	3 個
星期二	5 個
星期三	7 個
星期四	9 個
星期五	11 個
星期六	13 個
星期日	15 個

由每天所背的單字數形成的數列為
 $3, 5, 7, 9, 11, 13, 15$
 則小華一週能背幾個單字?
 解:
 $3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 = 63$

觀念一點通：

將一個等差數列的各項依次用「+」號連接起來，就稱為一個等差級數。

如上例： $\left\{ \begin{array}{l} 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15 \quad \text{是一個等差數列} \\ 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 \quad \text{是一個等差級數} \end{array} \right.$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \quad \quad \quad \quad \downarrow$
 首 第 \dots 末
 項 2 $\quad \quad \quad$ 項
 項

四、等差級數的和

$3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15$ 的值稱為此等差級數的和。

小故事

相傳數學家高斯(Carl Friedrich Gauss)在 10 歲時，老師在數學課上出了一道難題：「 $1 + 2 + 3 + \dots + 99 + 100 = ?$ 」給學生計算，老師心想趁學生做題時，可以休息一下，但不到幾秒鐘，高斯就舉手說出答案是 5050，讓老師吃了一驚。高斯是用甚麼方法算出來的呢？

高斯的算法如下：

假設 $S = 1 + 2 + 3 + \dots + 99 + 100$ 則：

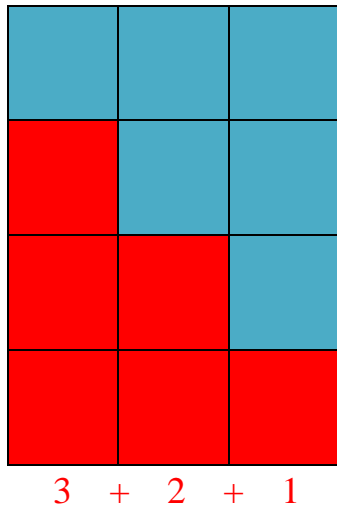
$$\begin{array}{r}
 S = 1 + 2 + 3 + \dots + 99 + 100 \\
 +) S = 100 + 99 + 98 + \dots + 2 + 1 \\
 \hline
 2S = 101 + 101 + 101 + \dots + 101 + 101 = 100 \times 101
 \end{array}$$

$$\text{所以 } S = \frac{100 \times 101}{2} = 5050$$

動動腦：請仿照高斯計算和的方法，求 $1 + 3 + 5 + \dots + 97 + 99 = ?$

活動:用高斯的想法，在方格上畫畫看

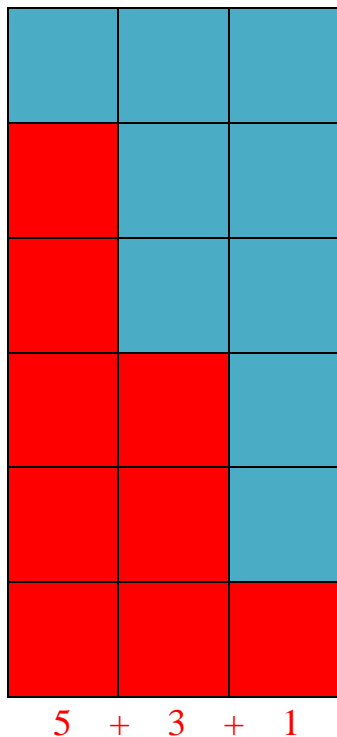
範例 5: $1 + 2 + 3$



塗色的共有
 $4 \times 3 = 12$ 格 方格
 所以塗藍色與塗紅色的部
 分各有 6 格，為 12 的一半

<思考> 4×3 是怎麼來的? 與想知道的 $1+2+3$ 的和有甚麼關係呢?

範例 6: $1 + 3 + 5$

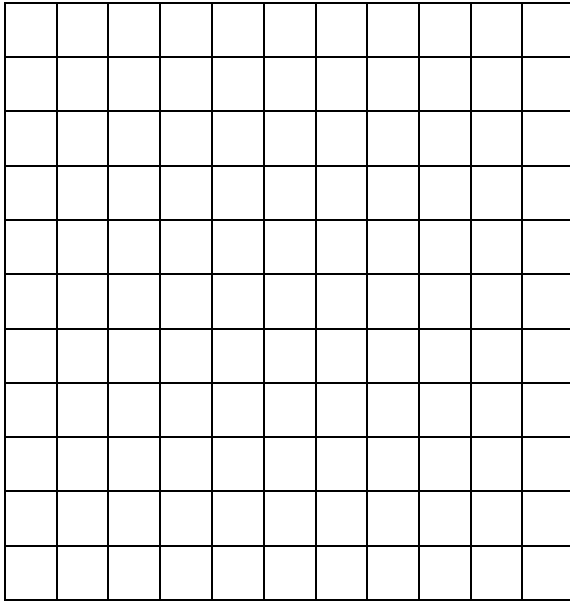


塗色的共有
 $6 \times 3 = 18$ 格 方格
 所以塗藍色與塗紅色的部
 分各有 9 格，為 18 的一半

<思考> 6×3 是怎麼來的? 跟想知道的 $1+3+5$ 的和有甚麼關係呢?

請仿照上面的方式，在方格上塗塗看。

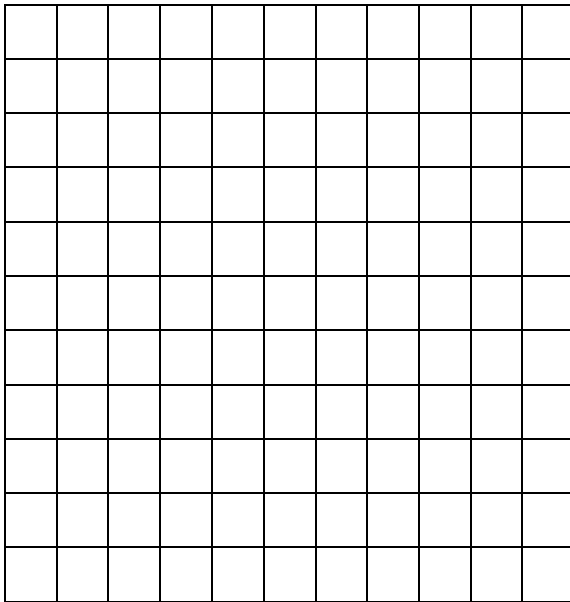
練習 6.1: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$



共塗了_____格方格

$$1+2+3+4+5+6 = \frac{\square \times \square}{2} = \underline{\hspace{2cm}}$$

練習 6.2: $1 + 4 + 7 + 10$



共塗了_____格方格

$$1+4+7+10 = \frac{\square \times \square}{2} = \underline{\hspace{2cm}}$$

觀念一點通：

1. Ex: 等差級數 $1+4+7+10$

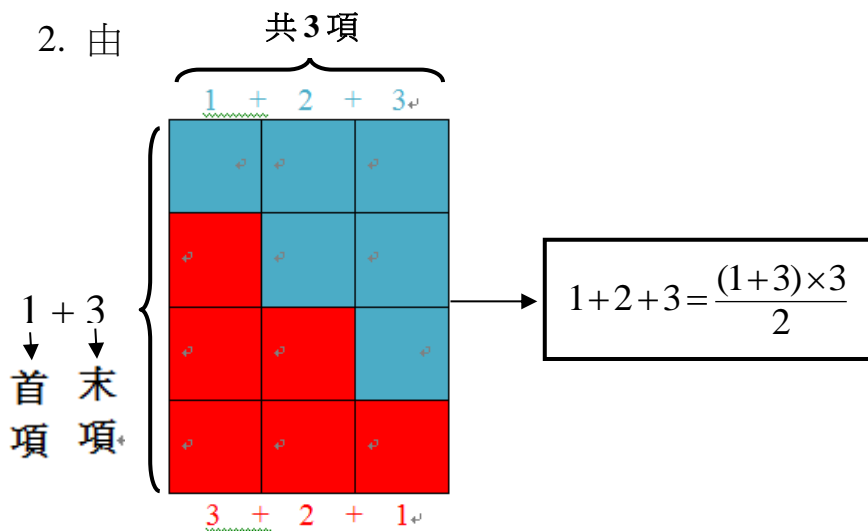
項數 $n=4$ ，首項 $a_1=1$ ，公差 $d=3$ ，末項 $a_n=a_4=10$

$$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1+4+7+10$$

等差級數習慣上，我們用 S_n 來代表這個級數的和，

也就是說： $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$

2. 由



等差級數的和

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{(a_1 + a_n) \times n}{2} = \frac{(\text{首項} + \text{末項}) \times \text{項數}}{2}$$

範例 7: 求等差級數 $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13$ 的和

解:

$$S_7 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = \frac{(\text{首項} + \text{末項}) \times \text{項數}}{2} = \frac{(1 + 13) \times 7}{2} = 49$$

練習 7.1: 求等差級數 $2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14$ 的和

練習 7.2: 求等差級數 $1 + 4 + 7 + 10 + 13 + 16 + 19 + 22$ 的和

範例 8: $9 + 5 + 1 + (-3) + (-7) + (-11)$ 的和

解:

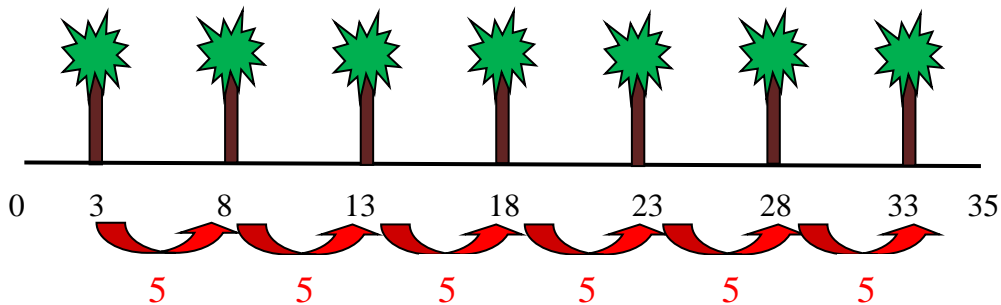
$$\begin{aligned} S_6 &= 9 + 5 + 1 + (-3) + (-7) + (-11) \\ &= \frac{(\text{首項} + \text{末項}) \times \text{項數}}{2} = \frac{[9 + (-11)] \times 6}{2} = \frac{(-2) \times 6}{2} = -6 \end{aligned}$$

練習 8.1: 求等差級數 $13 + 10 + 7 + 4 + 1 + (-2) + (-5)$ 的和

練習 8.2: 求等差級數 $(-6) + (-1) + 4 + 9 + 14 + 19$ 的和

觀念一點通：

1. 回想小學學的種樹問題，長 35 公尺的道路上，從 3 公尺處開始種樹，每隔 5 公尺種一棵樹，請問共種了幾棵樹？



解：
$$\frac{33-3}{5} + 1 = 7$$

說明：第一棵樹與最後一棵樹的距離為 30 公尺，

每隔 5 公尺種一棵，且都有種。所以共有 7 棵

2. 當等差級數項數很多，無法用數的數出來的時候，我們可以採用上述種樹的想法來思考。

Ex: $2+6+10+\dots+42$ 此等差級數共有幾項？

解：項數 $= \frac{42-2}{4} + 1 = 11$

3. 也可以用等差數列一般項 $a_n = a_1 + (n-1) \times d$ 來求得項數 n

即 $42 = 2 + (n-1) \times 4$

→ 項數 $n = \frac{42-2}{4} + 1 = 11$

範例 9：求等差級數 $4+9+14+\dots+49$ 的和

$$\text{項數 } n = \frac{49-4}{5} + 1 = \frac{45}{5} + 1 = 10$$

解：

$$\begin{aligned} S_{10} &= 4+9+14+\dots+49 \\ &= \frac{(\text{首項}+\text{末項})\times\text{項數}}{2} = \frac{(4+49)\times 10}{2} = \frac{53\times 10}{2} = 265 \end{aligned}$$

練習 9.1：求等差級數 $1+7+13+\dots+55$ 的和

練習 9.2：求等差級數 $3+7+11+\dots+87$ 的和

範例 10：求等差級數 $(-8)+(-3)+2+\dots+37$ 的和

解：

$$\text{項數 } n = \frac{37-(-8)}{5} + 1 = \frac{45}{5} + 1 = 10$$

$$S_{10} = (-8)+(-3)+2+\dots+37$$

$$= \frac{(\text{首項}+\text{末項})\times\text{項數}}{2} = \frac{[(-8)+37]\times 10}{2} = \frac{29\times 10}{2} = 29\times 5 = 145$$

練習 10.1：求等差級數 $(-6)+(-2)+2+\dots+70$ 的和

練習 10.2：求等差級數 $(-10)+(-4)+(2)+\dots+50$ 的和

範例 11：等差級數的首項為 3，公差為 4，求前十五項的和

解：

$$\text{第15項 } a_{15} = 3 + (15-1) \times 4 = 3 + 14 \times 4 = 59$$

$$S_{15} = \frac{(\text{首項} + \text{末項}) \times \text{項數}}{2} = \frac{(3 + 59) \times 15}{2} = \frac{62 \times 15}{2} = 310$$

練習 11.1：等差級數的首項為 5，公差為 3，求前十項的和

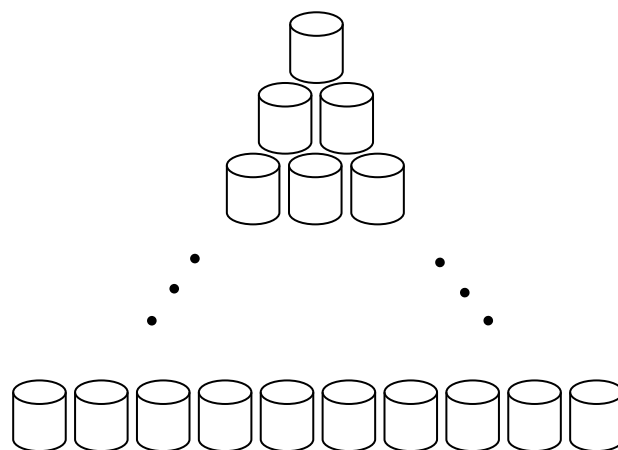
練習 11.2：等差級數的首項為 10，公差為 4，求前二十項的和

四、等差級數應用問題

有了等差級數的觀念後，我們來看看它能解決怎樣有趣的問題吧。

問題 1：大賣場常會將飲料罐排成(如下圖)，來做促銷，在賣場打工

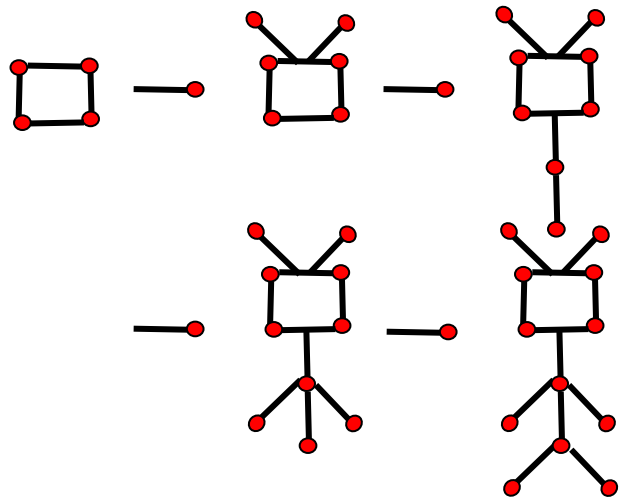
的阿家打算以每層差一罐的方式排 10 層，需用幾罐飲料？



問題 2：阿火家是賣火材棒的，他看大賣場用特別的排法來促銷飲料，

也想幫店裡做點特別的擺設，於是他把火材人的進化過程排出來

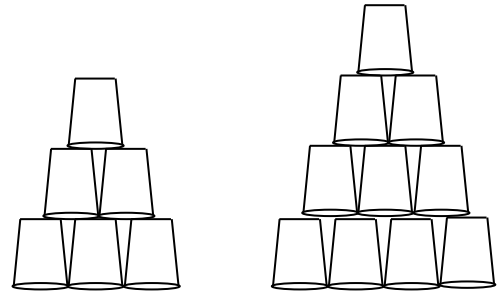
來，以下是他想排成的圖形，請問需要用幾根火材棒呢？



問題 3：我們常常看到廣告上面寫著：「總獎金高達 xxx 元！」

某遊戲，能拿到獎金的名次有十名，已知第十名有 1000 元，每往前一名多得 2000 元，請問總獎金有多少元？

問題 4: 阿西想把杯子裡的水瀝乾,於是將杯子倒著放,而為了美觀、省空間,他將杯子排成如大賣場在促銷飲料時的排法,例如:有 6 個杯子則擺成如<圖一>,有 10 個杯子則擺成如<圖二>,阿西今天有 120 個杯子,請問他最底層要排幾個杯子?才能剛好排成如圖一、二中由下往上每多一層則少一個杯子,最高層僅剩一個杯子的規律排法



<圖一>

<圖二>