

觀念一點通：

如果一個數列總共有 n 項，首項為 a_1 ，末項為 a_n ，公差為 d

則 n 稱為這個數列的項數，

$a_n = a_1 + (n-1) \times d$ 則稱為此數列的一般項

主題三 等差級數**一、級數**

範例 3: 下表是麻糬專賣店的價目表

麻糬 價目表	
芝麻	10 元
花生	10 元
抹茶紅豆	15 元
楓漿	15 元
酒釀	15 元
養生炭	20 元

由麻糬的價目表形成的數列為

10, 10, 15, 15, 15, 20

若各種口味都想買一個來吃吃看，

則總共要付多少錢？

解：

$10+10+15+15+15+20 = 85$ 元

觀念一點通：

將一個等差數列的各項依次用「+」號連接起來，就稱為一個等差級數。

如上例： $\left\{ \begin{array}{l} 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15 \quad \text{是一個等差數列} \\ 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 \quad \text{是一個等差級數} \end{array} \right.$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \quad \quad \quad \quad \downarrow$
 首 第 \dots 末
 項 2 $\quad \quad \quad$ 項
 項

四、等差級數的和

$3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15$ 的值稱為此等差級數的和。

小故事

相傳數學家高斯(Carl Friedrich Gauss)在 10 歲時，老師在數學課上出了一道難題：「 $1+2+3+\dots+99+100=?$ 」給學生計算，老師心想趁學生做題時，可以休息一下，但不到幾秒鐘，高斯就舉手說出答案是 5050，讓老師吃了一驚。高斯是用甚麼方法算出來的呢？

高斯的算法如下：

假設 $S = 1 + 2 + 3 + \dots + 99 + 100$ 則：

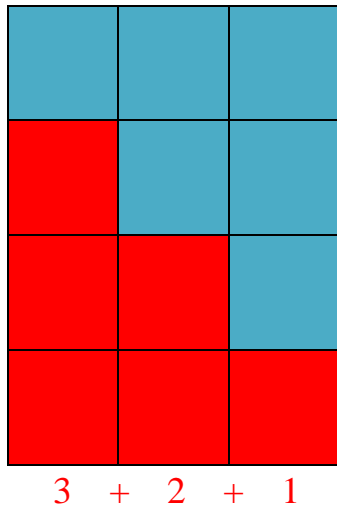
$$\begin{array}{r}
 S = 1 + 2 + 3 + \dots + 99 + 100 \\
 +) S = 100 + 99 + 98 + \dots + 2 + 1 \\
 \hline
 2S = 101 + 101 + 101 + \dots + 101 + 101 = 100 \times 101
 \end{array}$$

$$\text{所以 } S = \frac{100 \times 101}{2} = 5050$$

動動腦：請仿照高斯計算和的方法，求 $1+3+5+\dots+97+99=?$

活動:用高斯的想法，在方格上畫畫看

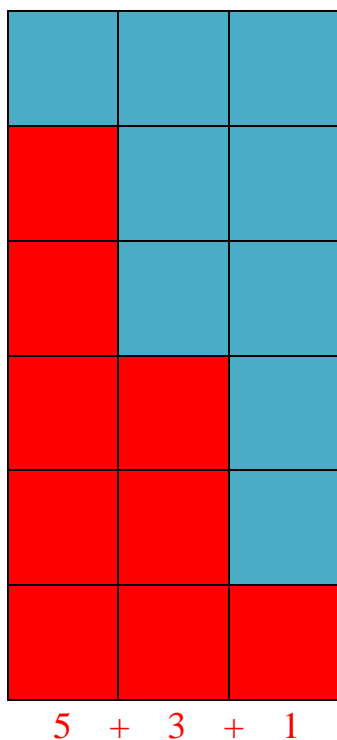
範例 5: $1 + 2 + 3$



塗色的共有
 $4 \times 3 = 12$ 格 方格
 所以塗藍色與塗紅色的部
 分各有 6 格，為 12 的一半

<思考> 4×3 是怎麼來的? 與想知道的 $1+2+3$ 的和有甚麼關係呢?

範例 6: $1 + 3 + 5$

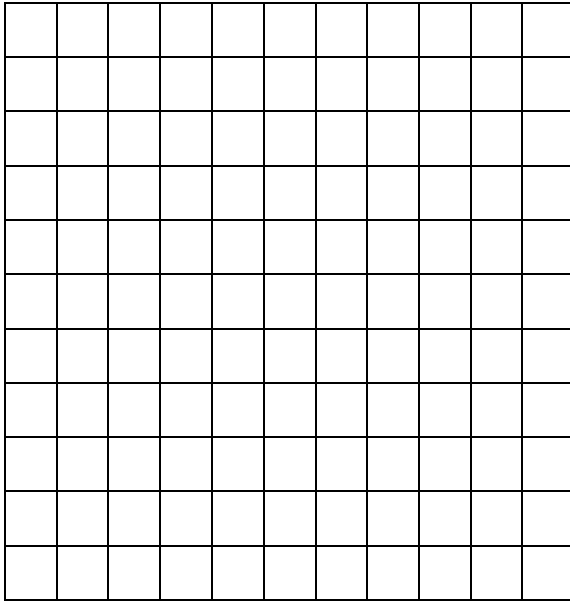


塗色的共有
 $6 \times 3 = 18$ 格 方格
 所以塗藍色與塗紅色的部
 分各有 9 格，為 18 的一半

<思考> 6×3 是怎麼來的? 跟想知道的 $1+3+5$ 的和有甚麼關係呢?

請仿照上面的方式，在方格上塗塗看。

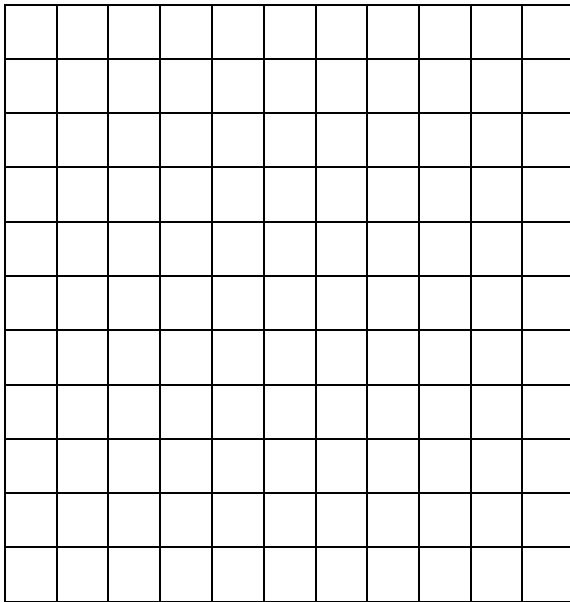
練習 6.1: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$



共塗了_____格方格

$$1+2+3+4+5+6 = \frac{\square \times \square}{2} = \underline{\hspace{2cm}}$$

練習 6.2: $1 + 4 + 7 + 10$



共塗了_____格方格

$$1+4+7+10 = \frac{\square \times \square}{2} = \underline{\hspace{2cm}}$$

觀念一點通：

1. Ex: 等差級數 $1+4+7+10$

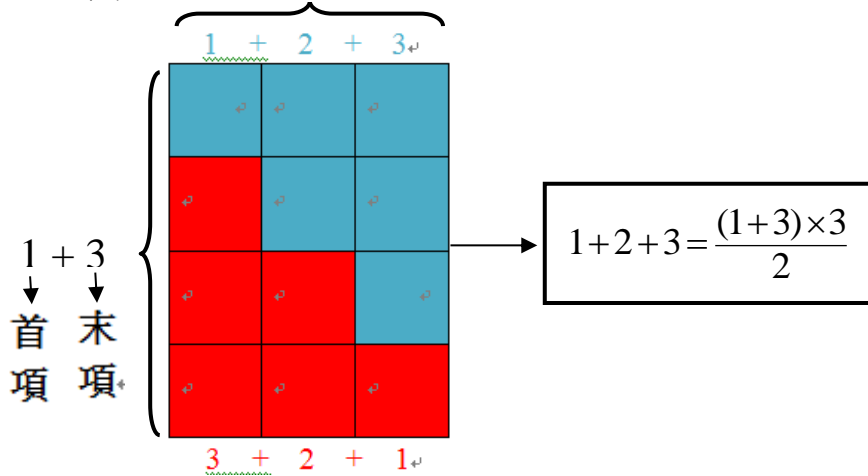
項數 $n = 4$ ，首項 $a_1 = 1$ ，公差 $d = 3$ ，末項 $a_n = a_4 = 10$

$$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1 + 4 + 7 + 10$$

等差級數習慣上，我們用 S_n 來代表這個級數的和，

也就是說： $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$

2. 由 共 3 項



等差級數的和

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{(a_1 + a_n) \times n}{2} = \frac{(\text{首項} + \text{末項}) \times \text{項數}}{2}$$

範例 7: 求等差級數 $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13$ 的和

解:

$$S_7 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = \frac{(\text{首項} + \text{末項}) \times \text{項數}}{2} = \frac{(1 + 13) \times 7}{2} = 49$$

練習 7.1: 求等差級數 $2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14$ 的和

練習 7.2: 求等差級數 $1 + 4 + 7 + 10 + 13 + 16 + 19 + 22$ 的和

範例 8: $9 + 5 + 1 + (-3) + (-7) + (-11)$ 的和

解:

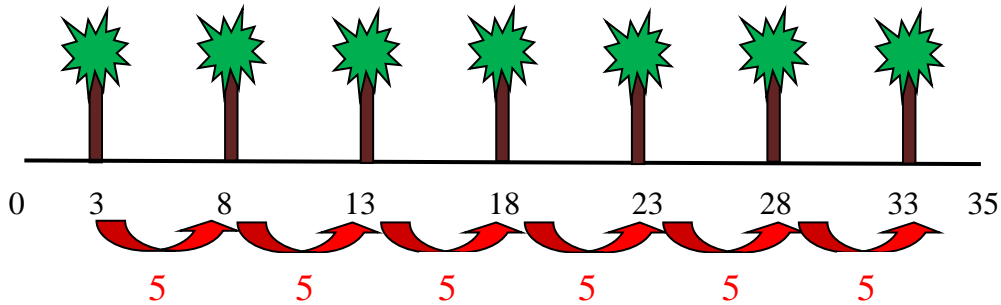
$$\begin{aligned} S_6 &= 9 + 5 + 1 + (-3) + (-7) + (-11) \\ &= \frac{(\text{首項} + \text{末項}) \times \text{項數}}{2} = \frac{[9 + (-11)] \times 6}{2} = \frac{(-2) \times 6}{2} = -6 \end{aligned}$$

練習 8.1: 求等差級數 $13 + 10 + 7 + 4 + 1 + (-2) + (-5)$ 的和

練習 8.2: 求等差級數 $(-6) + (-1) + 4 + 9 + 14 + 19$ 的和

觀念一點通：

1. 回想小學學的種樹問題，長 35 公尺的道路上，從 3 公尺處開始種樹，每隔 5 公尺種一棵樹，請問共種了幾棵樹？



解：
$$\frac{33-3}{5}+1=7$$

說明：第一棵樹與最後一棵樹的距離為 30 公尺，

每隔 5 公尺種一棵，且都有種。所以共有 7 棵

2. 當等差級數項數很多，無法用數的數出來的時候，我們可以採用上述種樹的想法來思考。

Ex: $2+6+10+\dots+42$ 此等差級數共有幾項？

解：項數 $= \frac{42-2}{4}+1 = 11$

3. 也可以用等差數列一般項 $a_n = a_1 + (n-1) \times d$ 來求得項數 n

即 $42 = 2 + (n-1) \times 4$

→ 項數 $n = \frac{42-2}{4}+1 = 11$

範例 9：求等差級數 $4+9+14+\dots+49$ 的和

$$\text{項數 } n = \frac{49-4}{5} + 1 = \frac{45}{5} + 1 = 10$$

解：

$$\begin{aligned} S_{10} &= 4+9+14+\dots+49 \\ &= \frac{(\text{首項}+\text{末項})\times\text{項數}}{2} = \frac{(4+49)\times 10}{2} = \frac{53\times 10}{2} = 265 \end{aligned}$$

練習 9.1：求等差級數 $1+7+13+\dots+55$ 的和

練習 9.2：求等差級數 $3+7+11+\dots+87$ 的和

範例 10：求等差級數 $(-8)+(-3)+2+\dots+37$ 的和

解：

$$\text{項數 } n = \frac{37-(-8)}{5} + 1 = \frac{45}{5} + 1 = 10$$

$$S_{10} = (-8)+(-3)+2+\dots+37$$

$$= \frac{(\text{首項}+\text{末項})\times\text{項數}}{2} = \frac{[(-8)+37]\times 10}{2} = \frac{29\times 10}{2} = 29\times 5 = 145$$

練習 10.1：求等差級數 $(-6)+(-2)+2+\dots+70$ 的和

練習 10.2：求等差級數 $(-10)+(-4)+(2)+\dots+50$ 的和

範例 11：等差級數的首項為 3，公差為 4，求前十五項的和

解：

$$\text{第15項 } a_{15} = 3 + (15-1) \times 4 = 3 + 14 \times 4 = 59$$

$$S_{15} = \frac{(\text{首項} + \text{末項}) \times \text{項數}}{2} = \frac{(3 + 59) \times 15}{2} = \frac{62 \times 15}{2} = 310$$

練習 11.1：等差級數的首項為 5，公差為 3，求前十項的和

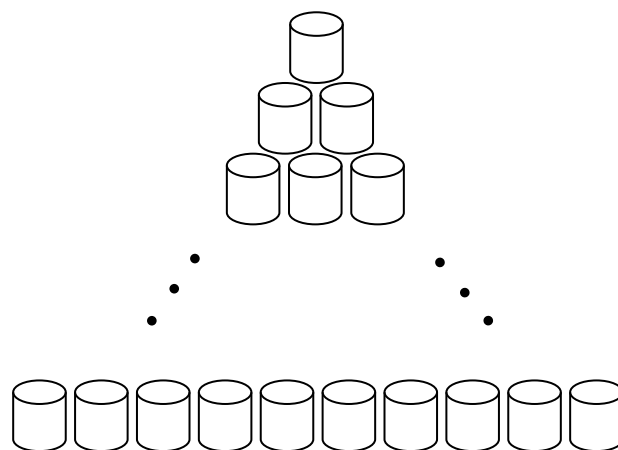
練習 11.2：等差級數的首項為 10，公差為 4，求前二十項的和

四、等差級數應用問題

有了等差級數的觀念後，我們來看看它能解決怎樣有趣的問題吧。

問題 1：大賣場常會將飲料罐排成(如下圖)，來做促銷，在賣場打工

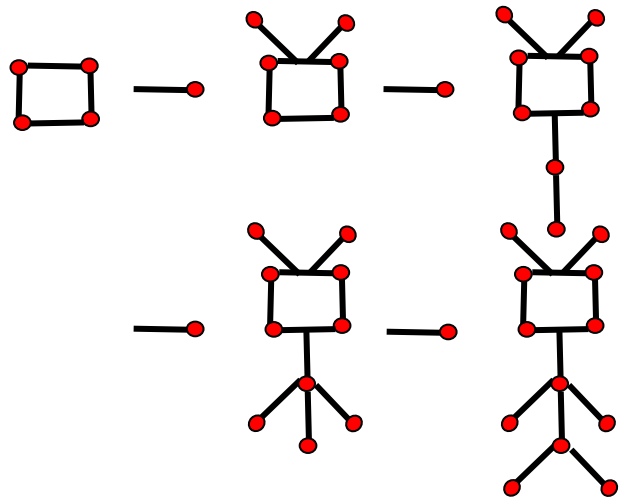
的阿家打算以每層差一罐的方式排 10 層，需用幾罐飲料？



問題 2：阿火家是賣火材棒的，他看大賣場用特別的排法來促銷飲料，

也想幫店裡做點特別的擺設，於是他把火材人的進化過程排出來

來，以下是他想排成的圖形，請問需要用幾根火材棒呢？



問題 3：我們常常看到廣告上面寫著：「總獎金高達 xxx 元！」

某遊戲，能拿到獎金的名次有十名，已知第十名有 1000 元，每往前一名多得 2000 元，請問總獎金有多少元？

問題 4: 阿西想把杯子裡的水瀝乾,於是將杯子倒著放,而為了美觀、省空間,他將杯子排成如大賣場在促銷飲料時的排法,例如:有 6 個杯子則擺成如<圖一>,有 10 個杯子則擺成如<圖二>,阿西今天有 120 個杯子,請問他最底層要排幾個杯子?才能剛好排成如圖一、二中由下往上每多一層則少一個杯子,最高層僅剩一個杯子的規律排法

