

主題四 利用因式分解法解一元二次方程式



解方程式 $(x-1)(x+2)=0$ 比
解方程式 $x^2+x-2=0$ 簡單，所以我們
可以利用因式分解將二次式分解成
兩個一次式相乘的形式來解方程式。



大家說說看，我們之前學過的因
式分解有哪些方法啊？

有提出公因式法還有
十字交乘法！



不是還可以利用乘法公式
做因式分解嗎？

乘法公式部分也可以利用
十字交乘法啊！



沒錯，所以我們一面複習
提出公因式法及十字交乘法，一面
利用它們來解一元二次方程式。

Part 1 提出公因式

例子講解

解下列各一元二次方程式：

$$(1) x^2 + 2x = 0$$

$$\text{解：} x \cdot x + 2 \cdot x = 0$$

$$x(x+2) = 0 \quad (\text{提出公因式 } x)$$

$$x = 0 \text{ 或 } x+2 = 0 \quad (\text{若 } A \times B = 0, \text{ 則 } A = 0 \text{ 或 } B = 0)$$

$$x = 0 \text{ 或 } x = -2$$

提出公因式 x ，然後把前項留下的 x 、
”+“、後項留下的 2 ，按照順序寫在另一個
括號，變成 $x \cdot (x+2)$ 。



$$(2) 3x - 2x^2 = 0$$

$$\text{解：} 3 \cdot x - 2 \cdot x \cdot x = 0$$

$$x(3-2x) = 0 \quad (\text{提出公因式 } x)$$

$$x = 0 \text{ 或 } 3-2x = 0 \quad (\text{若 } A \times B = 0, \text{ 則 } A = 0 \text{ 或 } B = 0)$$

$$x = 0 \text{ 或 } x = \frac{3}{2}$$

提出公因式 x ，然後把前項留下的 3 、
”-“、後項留下的 $2x$ ，按照順序寫在
另一個括號，變成 $x \cdot (3-2x)$ 。



$$(3) \quad x(x+3) - 5(x+3) = 0$$

$$\text{解：} x \cdot (x+3) - 5 \cdot (x+3) = 0$$

$$(x-5)(x+3) = 0 \quad (\text{提出公因式 } x+3)$$

$$x-5=0 \text{ 或 } x+3=0 \quad (\text{若 } A \times B = 0, \text{ 則 } A = 0 \text{ 或 } B = 0)$$

$$x = 5 \text{ 或 } x = -3$$

提出公因式 $(x+3)$ ，然後把前項留下的 x 、”-“、後項留下的 5 ，按照順序寫在另一個括號，變成 $(x-5)(x+3)$ 。



$$(4) \quad (x+5)(2x-3) + (x+5)(5x+9) = 0$$

$$\text{解：} (x+5) \cdot (2x-3) + (x+5) \cdot (5x+9) = 0$$

$$(x+5)(2x-3+5x+9) = 0 \quad (\text{提出公因式 } x+5)$$

$$(x+5)(2x+5x-3+9) = 0$$

$$(x+5)(7x+6) = 0$$

$$x+5=0 \text{ 或 } 7x+6=0 \quad (\text{若 } A \times B = 0, \text{ 則 } A = 0 \text{ 或 } B = 0)$$

$$x = -5 \text{ 或 } x = -\frac{6}{7}$$

$$(5) \quad (x+2)^2 - (x+2) = 0$$

$$\text{解：} (x+2) \cdot (x+2) - 1 \cdot (x+2) = 0$$

$$(x+2)(x+2-1) = 0 \quad (\text{提出公因式 } x+2)$$

$$(x+2)(x+1) = 0$$

$$x+2=0 \text{ 或 } x+1=0 \quad (\text{若 } A \times B = 0, \text{ 則 } A = 0 \text{ 或 } B = 0)$$

$$x = -2 \text{ 或 } x = -1$$



解下列各一元二次方程式：

(1) $x^2 - x = 0$

(2) $7x + 2x^2 = 0$

(3) $x(2x - 3) + 5(2x - 3) = 0$

(4) $x(2 + 5x) - x = 0$

(5) $(x + 3)^2 + (x + 3) = 0$

(6) $(x - 3)(5x - 3) + (x - 3)(2x + 7) = 0$

Part2 十字交乘法

例子講解

解下列各一元二次方程式：

$$(1) \quad x^2 + 7x + 12 = 0$$

$$(x+3)(x+4) = 0$$

$$x+3=0 \text{ 或 } x+4=0$$

$$x=-3 \text{ 或 } x=-4$$

$$\begin{array}{r} x \quad \quad \quad +3 \\ \quad \quad \quad x \quad \quad +4 \\ \hline 3x+4x=7x \end{array}$$

$$(2) \quad x^2 - 7x + 12 = 0$$

$$(x-3)(x-4) = 0$$

$$x-3=0 \text{ 或 } x-4=0$$

$$x=3 \text{ 或 } x=4$$

$$\begin{array}{r} x \quad \quad \quad -3 \\ \quad \quad \quad x \quad \quad -4 \\ \hline (-3x)+(-4x)=-7x \end{array}$$

$$(3) \quad x^2 + x - 12 = 0$$

$$(x-3)(x+4) = 0$$


$$x-3=0 \text{ 或 } x+4=0$$

$$x=3 \text{ 或 } x=-4$$

$$\begin{array}{r} x \quad \quad \quad -3 \\ \quad \quad \quad x \quad \quad +4 \\ \hline (-3x)+4x=x \end{array}$$



做十字交乘法時，要注意正負號喔！


 牛刀小試


解下列各一元二次方程式：

(1) $x^2 + 5x + 6 = 0$

(2) $x^2 - 7x + 6 = 0$

(3) $x^2 + x - 6 = 0$

(4) $x^2 - 3x - 18 = 0$


 例子講解

解下列各一元二次方程式：

(1) $2x^2 + 5x + 3 = 0$

$(2x+3)(x+1) = 0$

$2x+3=0$ 或 $x+1=0$

$x = -\frac{3}{2}$ 或 $x = -1$

2x		+3
x		+1
3x+2x=5x		

(2) $2x^2 - 7x + 3 = 0$

$(2x-1)(x-3) = 0$

$2x-1=0$ 或 $x-3=0$

$x = \frac{1}{2}$ 或 $x = 3$

2x		-1
x		-3
(-x)+(-6x)=-7x		

(3) $2x^2 - x - 3 = 0$

$(2x-3)(x+1)=0$

$2x-3=0$ 或 $x+1=0$

$x = \frac{3}{2}$ 或 $x = -1$

$$\begin{array}{r}
 2x \quad \quad \quad -3 \\
 \quad \quad \quad \times \\
 \quad \quad \quad \times \\
 \quad \quad \quad \times \\
 x \quad \quad \quad \quad +1 \\
 \hline
 (-3x)+2x = -x
 \end{array}$$

$$(-3x)+2x = -x$$

(4) $-3x^2 - x + 2 = 0$

$3x^2 + x - 2 = 0$

(利用等量公理，等號兩邊同乘以 -1)

$(3x-2)(x+1)=0$


$3x-2=0$ 或 $x+1=0$

(若 $A \times B = 0$ ，則 $A = 0$ 或 $B = 0$)

$x = \frac{2}{3}$ 或 $x = -1$



遇到 x^2 的係數是負數時，
 可以先把係數變成正數之後，
 再來做因式分解喔！

 牛刀小試


解下列各一元二次方程式：

(1) $3x^2 + 6x + 3 = 0$

(2) $3x^2 - 10x + 3 = 0$

(3) $3x^2 + 8x - 3 = 0$

(4) $-2x^2 - 3x + 5 = 0$


 例子講解

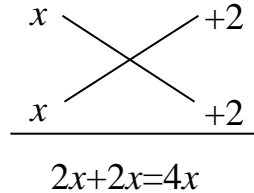
解下列各一元二次方程式：

$$(1) \quad x^2 + 4x + 4 = 0$$


$$(x+2)(x+2) = 0$$

$$x+2=0 \quad \text{或} \quad x+2=0$$


$$x=-2 \quad \text{或} \quad x=-2$$



A diagram showing the cross-multiplication process for the equation $x^2 + 4x + 4 = 0$. It consists of two rows of terms: the top row has x and $+2$, and the bottom row has x and $+2$. Lines connect the x in the top row to the $+2$ in the bottom row, and the $+2$ in the top row to the x in the bottom row, forming an 'X' shape. Below these two rows is a horizontal line, and underneath that line is the equation $2x+2x=4x$.



老師，這一題的答案好奇怪喔！
怎麼兩個答案都一樣是 $x=-2$ ？



小明這個問題問的很好！


這一題因為分解出來的兩個因式一樣，所以兩個解都是 $x=-2$ 。

當一元二次方程式有兩個相同的解時，我們稱此方程式有**重根**，根就是解啦！

像這一題的解就可以記為： $x=-2$ (重根)

其實還是有兩個解，只是剛好是同一個數。

所以 x 的值不一定是相異的哦！



原來是這樣啊～我懂了，
謝謝老師！

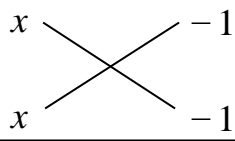
(2) $x^2 - 2x + 1 = 0$

$(x-1)(x-1) = 0$

$x-1=0$ 或 $x-1=0$

$x=1$ 或 $x=1$

$x=1$ (重根)



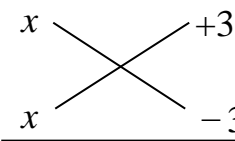
$(-x) + (-x) = -2x$

(3) $x^2 - 9 = 0$

$(x+3)(x-3) = 0$

$x+3=0$ 或 $x-3=0$

$x=-3$ 或 $x=3$



$3x + (-3x) = 0$

$x = -3$ 或 $x = 3$
 可以合併寫成 $x = \pm 3$

哈哈，原來解一元二次方程式這麼簡單，
 我都會做了~~~



話別說這麼快，
 試試下面的隨堂練習吧！

$$(3) \quad 16x^2 - 9 = 0$$

$$(4x+3)(4x-3) = 0$$

$$4x+3=0 \text{ 或 } 4x-3=0$$

$$x = -\frac{3}{4} \text{ 或 } x = \frac{3}{4}$$

$$4x \quad \quad \quad +3$$

$$4x \quad \quad \quad -3$$

$$12x + (-12x) = 0$$



牛刀小試

解下列各一元二次方程式：

$$(1) \quad 4x^2 + 12x + 9 = 0$$

$$(2) \quad 4x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$(3) \quad 4x^2 - 9 = 0$$

可以合併寫成 $x = \pm \frac{3}{4}$