

## 單元八 一元二次方程式及其解

### 主題一 認識一元二次方程式

# 寒假 揪團 大放送

旅行社招攬旅行團，預定人數為 20 人，每人收團費 5000 元，但人數若超過 20 人，則每增加 1 人，團費就減收 100 元，已知此旅行團超過 20 人，且旅行社共收到 114400 元，問共有多少人參加？

我們可以假設共有  $20 + x$  人參加，列表看一下每人團費的變化：

參加人數(人)	每人團費(元)	旅行社共收到的團費(元)
20	5000	$5000 \times 20 = 100000$
21	$4900(=5000 - 100 \times 1)$	$4900 \times 21 = 102900$
22	$4800(=5000 - 100 \times 2)$	$4800 \times 22 = 105600$
23	$4700(=5000 - 100 \times 3)$	$4700 \times 23 = 108100$
⋮	⋮	⋮
$20 + x$	$5000 - 100x$	$(5000 - 100x)(20 + x)$

又由「旅行社共收到 114

400 元」，可列出方程式

$$(5000 - 100x)(20 + x) = 114400 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

將 $\textcircled{1}$ 式整理後可得  $100000 + 5000x - 2000x - 100x^2 = 114400$   
 $-100x^2 + 3000x - 14400 = 0$

方程式  $-100x^2 + 3000x - 14400 = 0$  中，

等號的左邊是一個  $x$  的二次多項式，等號右邊為 0，所以稱此方程式為一個**一元二次方程式**。

以下我們再看一些例子：

◆有兩個連續整數，已知其平方和為 145。

像 1 和 2、15 和 16、27 和 28、……，  
都是兩個連續整數。



我們可以假設較小的數為  $x$ ，則較大的數就是  $x+1$ ，

再由「已知其平方和為 145」，可列出方程式

$$x^2 + (x+1)^2 = 145 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

將 $\textcircled{2}$ 式整理後可得  $x^2 + x^2 + 2x + 1 = 145$

$$2x^2 + 2x - 144 = 0$$

方程式  $2x^2 + 2x - 144 = 0$  中，等號的左邊是一個  $x$  的二次多項式，等號右邊為 0，所以此方程式也是一個**一元二次方程式**。

◆一面積為 1440 平方公尺的長方形，已知長比寬多 5 公尺。



我們可以假設長方形的長為  $x$  公尺，列表看一下寬與面積的變化：

長	寬	面積
6	1	$6 \times 1 = 6$
7	2	$7 \times 2 = 14$
8	3	$8 \times 3 = 24$
⋮	⋮	
$x$	$x-5$	$x(x-5)$

又由「面積為 1440 平方公尺」，可列出方程式

$$x(x-5) = 1440 \quad \dots\dots\textcircled{3}$$

將 $\textcircled{3}$ 式整理後可得  $x^2 - 5x = 1440$

$$x^2 - 5x - 1440 = 0$$

方程式  $x^2 - 5x - 1440 = 0$  中，等號的左邊是一個  $x$  的二次多項式，等號右邊為 0，所以此方程式也是一個一元二次方程式。

從上面的例子，我們看到這些方程式

$$(5000 - 100x)(20 + x) = 114400$$

$$x^2 + (x + 1)^2 = 145$$

$$x(x - 5) = 1440$$

都可以整理成等號左邊是一個  $x$  的二次多項式，右邊為 0 的方程式，所以它們都是一元二次方程式。



一個方程式如果可以整理成

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$$

的樣子，等號左邊是一個  $x$  的二次多項式，右邊為 0，我們就說它是一個一元二次方程式。



### 隨堂練習

下列何者為一元二次方程式？

(1)  $2x - 2 = 0$

(2)  $x^2 - 5x = 0$

(3)  $-5x^2 + 14 = 0$

(4)  $5x + x^2 = -11$

(5)  $7x^2 - 8x - 9 = 0$

## 主題二 一元二次方程式的解



花花，你還記得什麼是方程式的解嗎？

我知道！你從來沒有少算過我的飲料錢，重點是……

小看我，我會賣飲料，還很會算數學呢！



開玩笑啦！方程式的解就是把數代進去檢查等號兩邊有沒有相等啊？

可是你看這一題，題目說 3 是方程式  $2x^2 - x - 15 = 0$  的解，可是我怎麼驗算都不對！



$$\begin{aligned} & 2 \cdot 3^2 - 3 - 15 \\ &= 6^2 - 3 - 15 \\ &= 12 - 3 - 15 \\ &= 9 - 15 \end{aligned}$$

是喔！讓我看看你算的。

9-15 不可能等於 0 啊！



喔喔~~，綠綠，你有兩個地方搞錯了！  
 $2 \cdot 3^2$  不會等於  $6^2$ ！  
 $6^2$  也不會等於 12 啊！

$$\begin{aligned} & 2 \cdot 3^2 - 3 - 15 \\ & \neq \times 6^2 - 3 - 15 \\ & \neq \times 12 - 3 - 15 \\ & = 9 - 15 \end{aligned}$$

不是說「負負得正」嗎？那「錯錯」不也應該得「對」！

你來亂的！。

說真的，到底應該怎麼算？

你想想看， $2x^2$  是什麼意思？

就是  $2 \cdot x \cdot x$  啊！

既然是這樣， $x$  用 3 代進去，會得到多少啊？

$2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$ ，原來是這樣。

那你也知道  $6^2$  為什麼不是 12 了吧？

知道了， $6^2 = 6 \cdot 6 = 36$


**範例 1**

1. 當  $x = 4$  時，計算下列各單項式的值：

單項式	$2x^2$	$-3x^2$
單項式的值	$2 \cdot 4^2$ $= 2 \cdot 16$ $= 32$	$-3 \cdot 4^2$ $= -3 \cdot \underline{\quad}$ $=$

2. 當  $x = -3$  時，計算下列各單項式的值：

單項式	$2x^2$	$-3x^2$
單項式的值	$2 \cdot (-3)^2$ $= 2 \cdot 9$ $= 18$	$-3 \cdot (-3)^2$ $= -3 \cdot \underline{\quad}$ $=$


**練習**

(1) 當  $x = -2$  時， $x^2$  的值為\_\_\_\_\_。

(2) 當  $x = 3$  時， $5x^2$  的值為\_\_\_\_\_。

(3) 當  $x = 2$  時， $-4x^2$  的值為\_\_\_\_\_。



$2 \cdot 3^2$ ，不是先算  $2 \cdot 3 = 6$ ，  
而是應該先算  $3^2 = 9$ ，  
再算  $2 \times 9 = 18$  嘛！

本來就這樣！



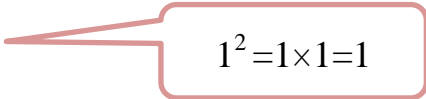


下列何者為一元二次方程式  $3x^2 + 4x - 4 = 0$  的解？

- (A) 1                      (B)  $\frac{2}{3}$                       (C) -2

解：(A) 將方程式  $3x^2 + 4x - 4 = 0$  中，等號左邊的  $x$  用 1 代入，得到

$$\begin{aligned} & 3 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 - 4 \\ &= 3 + 4 - 4 \\ &= 3 \neq 0 \end{aligned}$$

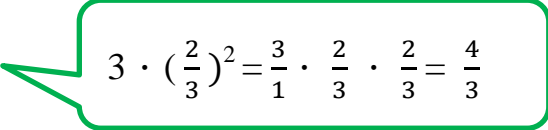


$$1^2 = 1 \times 1 = 1$$

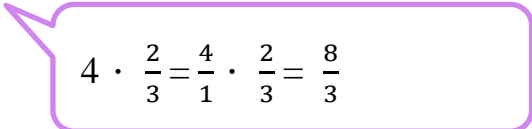
所以 1 不是  $3x^2 + 4x - 4 = 0$  的解。

(B) 將方程式  $3x^2 + 4x - 4 = 0$  中，等號左邊的  $x$  用  $\frac{2}{3}$  代入，得到

$$\begin{aligned} & 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 4 \cdot \frac{2}{3} - 4 \\ &= \frac{4}{3} + \frac{8}{3} - 4 \\ &= \frac{12}{3} - 4 \\ &= 4 - 4 \\ &= 0 \end{aligned}$$



$$3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{3}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

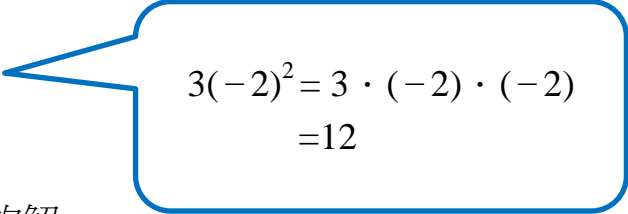


$$4 \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{1} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$$

所以  $\frac{2}{3}$  是  $3x^2 + 4x - 4 = 0$  的解。

(C) 將方程式  $3x^2 + 4x - 4 = 0$  中，等號左邊的  $x$  用 -2 代入，得到

$$\begin{aligned} & 3(-2)^2 + 4(-2) - 4 \\ &= 12 + (-8) - 4 \\ &= 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} 3(-2)^2 &= 3 \cdot (-2) \cdot (-2) \\ &= 12 \end{aligned}$$

所以 -2 是  $3x^2 + 4x - 4 = 0$  的解。





- (1) 4 為一元二次方程式  $x^2 + x - 12 = 0$  的解嗎？
- (2) 下列何者為一元二次方程式  $2x^2 - 5x + 3 = 0$  的解？  
(A) 1                      (B)  $\frac{3}{2}$                       (C) 3
- (3) 下列何者為一元二次方程式  $x^2 - 3x + 2 = 0$  的解？  
(A) 1                      (B) 2                      (C) 3
- (4) 下列何者為一元二次方程式  $(x-1)(x-2) = 0$  的解？  
(A) 1                      (B) 2                      (C) 3

花花，在做第 (4) 題時，我是這樣想的，你看厲不厲害！

$$\begin{aligned} &(1-1)(2-2) \\ &= 0 \times 0 \\ &= 0 \\ &\text{所以答案是 1 跟 2。} \end{aligned}$$



不對不對！在方程式  $(x-1)(x-2)=0$  中的 兩個  $x$  必須是相同的數！

是喔！那怎麼辦？



正確的算法…

(A)  $x$  用 1 代入，得到  
 $(1-1)(1-2)$   
 $= 0 \times (-1)$   
 $= 0$   
 所以 1 是方程式  $(x-1)(x-2)=0$  的解。  
 (B)  $x$  用 2 代入，得到……

我會了，剩下的我來就好！

