

單元八 一元二次方程式及其解

主題一 認識一元二次方程式

寒假 揪團 大放送

旅行社招攬旅行團，預定人數為 20 人，每人收團費 5000 元，但人數若超過 20 人，則每增加 1 人，團費就減收 100 元，已知此旅行團超過 20 人，且旅行社共收到 114400 元，問共有多少人參加？

我們可以假設共有 $20 + x$ 人參加，列表看一下每人團費的變化：

參加人數(人)	每人團費(元)	旅行社共收到的團費(元)
20	5000	$5000 \times 20 = 100000$
21	$4900(=5000 - 100 \times 1)$	$4900 \times 21 = 102900$
22	$4800(=5000 - 100 \times 2)$	$4800 \times 22 = 105600$
23	$4700(=5000 - 100 \times 3)$	$4700 \times 23 = 108100$
⋮	⋮	⋮
$20 + x$	$5000 - 100x$	$(5000 - 100x)(20 + x)$

又由「旅行社共收到 114

400 元」，可列出方程式

$$(5000 - 100x)(20 + x) = 114400 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

將 $\textcircled{1}$ 式整理後可得 $100000 + 5000x - 2000x - 100x^2 = 114400$
 $-100x^2 + 3000x - 14400 = 0$

方程式 $-100x^2 + 3000x - 14400 = 0$ 中，

等號的左邊是一個 x 的二次多項式，等號右邊為 0，所以稱此方程式為一個**一元二次方程式**。

以下我們再看一些例子：

◆有兩個連續整數，已知其平方和為 145。

像 1 和 2、15 和 16、27 和 28、……，
都是兩個連續整數。



我們可以假設較小的數為 x ，則較大的數就是 $x+1$ ，

再由「已知其平方和為 145」，可列出方程式

$$x^2 + (x+1)^2 = 145 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

將 $\textcircled{2}$ 式整理後可得 $x^2 + x^2 + 2x + 1 = 145$

$$2x^2 + 2x - 144 = 0$$

方程式 $2x^2 + 2x - 144 = 0$ 中，等號的左邊是一個 x 的二次多項式，等號右邊為 0，所以此方程式也是一個**一元二次方程式**。

◆一面積為 1440 平方公尺的長方形，已知長比寬多 5 公尺。



我們可以假設長方形的長為 x 公尺，列表看一下寬與面積的變化：

長	寬	面積
6	1	$6 \times 1 = 6$
7	2	$7 \times 2 = 14$
8	3	$8 \times 3 = 24$
⋮	⋮	
x	$x-5$	$x(x-5)$

又由「面積為 1440 平方公尺」，可列出方程式

$$x(x-5) = 1440 \quad \dots\dots ③$$

將③式整理後可得 $x^2 - 5x = 1440$

$$x^2 - 5x - 1440 = 0$$

方程式 $x^2 - 5x - 1440 = 0$ 中，等號的左邊是一個 x 的二次多項式，等號右邊為 0，所以此方程式也是一個一元二次方程式。

從上面的例子，我們看到這些方程式

$$(5000 - 100x)(20 + x) = 114400$$

$$x^2 + (x + 1)^2 = 145$$

$$x(x - 5) = 1440$$

都可以整理成等號左邊是一個 x 的二次多項式，右邊為 0 的方程式，所以它們都是一元二次方程式。



一個方程式如果可以整理成

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$$

的樣子，等號左邊是一個 x 的二次多項式，右邊為 0，我們就說它是一個**一元二次方程式**。



隨堂練習

下列何者為一元二次方程式？

(1) $2x - 2 = 0$

(2) $x^2 - 5x = 0$

(3) $-5x^2 + 14 = 0$

(4) $5x + x^2 = -11$

(5) $7x^2 - 8x - 9 = 0$