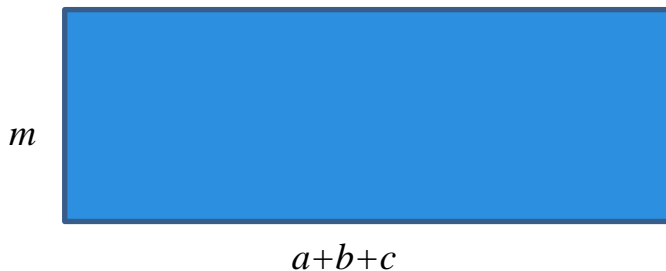
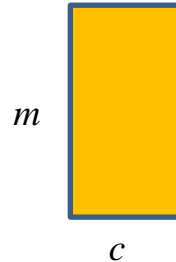
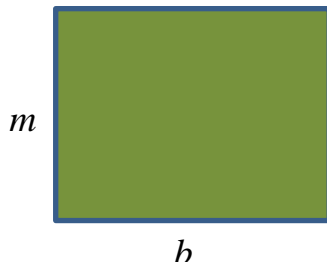
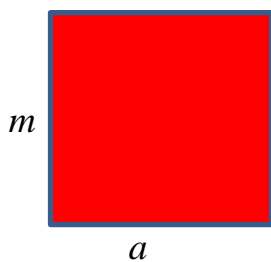


單位六 利用提公因式做因式分解

小忍、小者、小龜家裡用來補屋頂漏洞的長方形水溝蓋因年久生鏽，壞的厲害，決定把它換掉。記得師父雲遊四方前曾經告訴過他們，水溝蓋的大小是 $m \times (a+b+c)$ 平方公尺，



但他們三兄弟分頭找回來的水溝蓋大小卻分別為 $m \times a$ 平方公尺、 $m \times b$ 平方公尺、 $m \times c$ 平方公尺，



為了這三塊水溝蓋面積總和與師父那塊有沒有一樣大的問題，三兄弟各說各話又爭論了 100 年，當然屋頂漏洞也還沒有修好，只好繼續忍受風吹雨淋。

唸完了這一段，陳爸闔上書本對云云說：好啦，今天的故事唸完了，可以睡覺了吧？



可是我也想知道答案耶，不然我一直想會睡不著...

好吧，那就聽我慢慢道來。



主題一：公因式在哪？



先看看這個表，空格應該怎麼填呢？

整數	<p>29 是 $29^2 (= 29 \times 29)$ 的因數</p> <p>29 是 24×29 的因數</p> <p>所以 <u>29</u> 是 29^2 與 24×29 的公因數</p>
	<p>13 是 13^2 與 13×29 的公因數嗎？_____</p> <p> </p> <p>13×13</p>
	<p>7 是 7^2 與 7×29 的公因數嗎？_____</p>
多項式	<p>x 是 $x^2 (= x \cdot x)$ 的因式</p> <p>x 是 $24 \cdot x$ 的因式</p> <p>所以 <u>x</u> 是 x^2 與 $24 \cdot x$ 的公因式</p>
	<p>$x+5$ 是 $(x+5)^2$ 與 $24 \cdot (x+5)$ 的公因式嗎？_____</p> <p> </p> <p>$(x+5) \cdot (x+5)$</p>
	<p>$2x+1$ 是 $(2x+1)^2$ 與 $5 \cdot (2x+1)$ 的公因式嗎？_____</p> <p> </p> <p>$(2x+1) \cdot (2x+1)$</p>

哦，我知道了，公因式跟公因數很像嘛！
只是一個是多項式，一個是整數罷了！



老師講解



下列各題的選項中，哪些是正確的？正確的請打 O，錯誤的請打 X。

第 1 題	
____(1)	x 是 $7x$ 的因式
____(2)	x 是 x^2 的因式
____(3)	x 是 $x(x+1)$ 的因式
____(4)	x 是 $x+1$ 的因式

第 2 題	
____(1)	$x+2$ 是 $(x+2)(5x-3)$ 的因式
____(2)	$5x-3$ 是 $(x+2)(5x-3)$ 的因式
____(3)	$x-3$ 是 $(x+2)(5x-3)$ 的因式

學生練習



下列各題的選項中，哪些是正確的？正確的請打 O，錯誤的請打 X。

第 1 題	
____(1)	x 是 $x(x-7)$ 的因式
____(2)	$x-7$ 是 $x(x-7)$ 的因式
____(3)	$x+7$ 是 $x(x-7)$ 的因式

第 2 題	
____(1)	$3x-2$ 是 $(3x-2)^2$ 的因式
____(2)	$3x-2$ 是 $x(3x-2)$ 的因式
____(3)	$3x-2$ 是 $6(3x-2)$ 的因式

老師講解



1. $x+5$ 是 $3(x+5)^2$ 與 $5(x+5)$ 的公因式嗎？

解：

$3(x+5)^2 = 3 \cdot (x+5) \cdot (x+5)$	→ $x+5$ 是 $3(x+5)^2$ 的因式
$5(x+5) = 5 \cdot (x+5)$	→ $x+5$ 是 $5(x+5)$ 的因式
所以 <u>$x+5$</u> 是 $3(x+5)^2$ 與 $5(x+5)$ 的公因式	

2. $x-1$ 是 $7(x-1)(x+3)$ 與 $(x-1)(2x+5)$ 的公因式嗎？

解：

$7(x-1)(x+3) = 7 \cdot (x-1) \cdot (x+3)$	→ $x-1$ 是 $7(x-1)(x+3)$ 的因式
$(x-1)(2x+5) = (x-1) \cdot (2x+5)$	→ $x-1$ 是 $(x-1)(2x+5)$ 的因式
所以 <u>$x-1$</u> 是 $7(x-1)(x+3)$ 與 $(x-1)(2x+5)$ 的公因式	

3. $2x-7$ 是 $x(2x-7)$ 與 $2x^2$ 的公因式嗎？

解：

$x(2x-7) = x \cdot (2x-7)$	→ $2x-7$ 是 $x(2x-7)$ 的因式
$2x^2 = 2 \cdot x \cdot x$	→ $2x-7$ 不是 $x(2x-7)$ 的因式
所以 <u>$2x-7$</u> 不是 $x(2x-7)$ 與 x^2 的公因式	

學生練習



1. 下列哪些是正確的？對的打 O，錯的打 X。

第 1 題	
____(1)	x 是 $7 \cdot x$ 的因式
____(2)	x 是 $x \cdot x$ 的因式
____(3)	x 是 $7 \cdot x$ 與 $x \cdot x$ 的公因式

第 2 題	
____(1)	x 是 $5x$ 的因式
____(2)	x 是 x^2 的因式
____(3)	x 是 $5x$ 與 x^2 的公因式
____(4)	x^2 是 $5x$ 與 x^2 的公因式

第 3 題	
____(1)	x 是 $x \cdot (x+1)$ 的因式
____(2)	$x+1$ 是 $x \cdot (x+1)$ 的因式
____(3)	$x+1$ 是 $17 \cdot (x+1)$ 的因式
____(4)	x 是 $17 \cdot (x+1)$ 與 $x \cdot (x+1)$ 的公因式
____(5)	$x+1$ 是 $17 \cdot (x+1)$ 與 $x \cdot (x+1)$ 的公因式

第 4 題	
____(1)	x 是 $x \cdot (2x+3)$ 的因式
____(2)	$2x+3$ 是 $x \cdot (2x+3)$ 的因式
____(3)	x 是 x^2 的因式
____(4)	x 是 $x \cdot (2x+3)$ 與 x^2 的公因式
____(5)	$2x+3$ 是 $x \cdot (2x+3)$ 與 x^2 的公因式

第 5 題	
____(1)	$5x+2$ 是 $(5x+2)(x-3)$ 的因式
____(2)	$x-3$ 是 $(5x+2)(x-3)$ 的因式
____(3)	$5x+2$ 是 $(5x+2)^2$ 的因式
____(4)	$5x+2$ 是 $(5x+2)(x-3)$ 與 $(5x+2)^2$ 的公因式
____(5)	$x-3$ 是 $(5x+2)(x-3)$ 與 $(5x+2)^2$ 的公因式
____(6)	$(5x+2)^2$ 是 $(5x+2)(x-3)$ 與 $(5x+2)^2$ 的公因式

第 6 題	
____(1)	x 是 $x(x-5)$ 的因式
____(2)	$x-5$ 是 $x(x-5)$ 的因式
____(3)	$x-5$ 是 $(x-5)^2$ 的因式
____(4)	$x-5$ 是 $x(x-5)$ 與 $(x-5)^2$ 的公因式
____(5)	$(x-5)^2$ 是 $x(x-5)$ 與 $(x-5)^2$ 的公因式
____(6)	x 是 $x(x-5)$ 與 $(x-5)^2$ 的公因式

第 7 題	
____(1)	$x+1$ 是 $(x+1)(x+2)$ 的因式
____(2)	$x+2$ 是 $(x+1)(x+2)$ 的因式
____(3)	$x+2$ 是 $(x+2)(x-1)$ 的因式
____(4)	$x-1$ 是 $(x+2)(x-1)$ 的因式
____(5)	$x+1$ 是 $(x+1)(x+2)$ 與 $(x+2)(x-1)$ 的公因式
____(6)	$x+2$ 是 $(x+1)(x+2)$ 與 $(x+2)(x-1)$ 的公因式
____(7)	$x-1$ 是 $(x+1)(x+2)$ 與 $(x+2)(x-1)$ 的公因式

2. 下列何者是 $3x$ 與 $x(x+5)$ 的公因式？

- (A) x (B) $x+5$ (C) $x(x+5)$

3. 下列何者是 $(7x-3)^2$ 與 $7(7x-3)$ 的公因式？

- (A) $7x$ (B) $7x-3$ (C) $(7x-3)^2$

主題二：拿走公因式，我還留下什麼？

此時，云云已經了無睡意，決定起床聽陳爸講數學…



我再問你，
 $29^2 - 24 \times 29$
的標準分解式
是什麼？

$29 \times 29 = 841$ ， $24 \times 29 = 696$ ，
 $841 - 696 = \dots$ ，
唉唷，好難算喔！



其實，你有沒有發現 29^2 和 24×29 都有 29 這個公因數？
我們可以這樣做啊：

$$\begin{aligned} & 29^2 - 24 \times 29 \\ &= 29 \cdot 29 - 24 \times 29 \\ &= 29 \times (29 - 24) \\ &= 29 \times 5 \\ &= 5 \times 29 \end{aligned}$$

前後兩項的公因數 29，前項還留 29，後項還留 24
提出公因數 29，在括號裡面擺進前項留下的 29、
“-”、和後項留下的 24

標準分解式完成



哇，這樣簡單很多耶！那 x 的多項式是不是
也可以這樣做？

$$\begin{aligned} & x^2 - 24x \\ &= x \cdot x - 24 \cdot x \\ &= x(x - 24) \end{aligned}$$

前後兩項有公因式 x ，前項還留 x ，後項
還留 24

提出公因式 x ，在括號裡面擺進前項留下
的 x 、“-”、和後項留下的 24

沒錯，妳真會舉一反三！像這樣，將一個二次多項式分解
成 2 個一次多項式的乘積，就稱為這個多項式的因式分解。

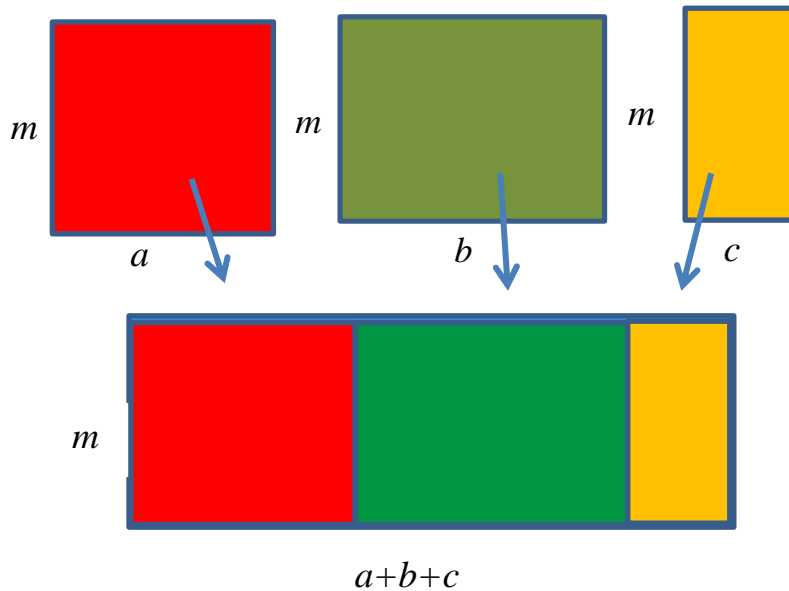


$$x^2 - 24x = x(x - 24)$$

↻ 因式分解 ↻
↻ 乘法展開 ↻

我們今天就是要利用提出公因式的方法做因式分解！

經過了好長一段時間的爭論，小忍、小者和小龜，終於在不斷的爭辯中，慢慢釐清頭緒了。原來啊…



因為 $ma + mb + mc = m(a + b + c)$

所以三兄弟的水溝蓋面積總和，和當年師父的水溝蓋面積是一樣

這不就是因式分解嗎？只要把 ma 、 mb 、 mc 的 m 提出來，再把留下的部分合併就好了嗎？竟然吵了 100 年！



沒錯，可惜他們師父雲遊四方前沒有先教會他們如何將多項式做因式分解！



老師講解(第一關)



利用提公因式法因式分解下列各題：

1. $x^2 + 3x$

解：

$$\begin{aligned} & x^2 + 3x \\ &= x \cdot x + 3 \cdot x \\ &= x(x + 3) \end{aligned}$$

有公因式 x ，前項還留 x ，後項還留 3。

提出 x ，將前項留下的 x 、”+”、後項留下的 3 寫在一個括號裡。

2. $2x^2 - 5x$

解：

$$\begin{aligned} & 2x^2 - 5x \\ &= 2 \cdot x \cdot x - 5 \cdot x \\ &= x(2x - 5) \end{aligned}$$

有公因式 x ，前項還留 $2x$ ，後項還留 5。

提出 x ，將前項留下的 $2x$ 、”-”、後項留下的 5 寫在一個括號裡。

3. $x(x + 5) - 2(x + 5)$

解：

$$\begin{aligned} & x(x + 5) - 2(x + 5) \\ &= x \cdot (x + 5) - 2 \cdot (x + 5) \\ &= (x + 5)(x - 2) \end{aligned}$$

有公因式 $(x + 5)$ ，前項還留 x ，後項還留 2。

提出 $(x + 5)$ ，將前項留下的 x 、”-”、後項留下的 2 寫在另一個括號裡。

4. $5x(2x + 1) + 2(2x + 1)$

解：

$$\begin{aligned} & 5x(2x + 1) + 2(2x + 1) \\ &= 5 \cdot x \cdot (2x + 1) + 2 \cdot (2x + 1) \\ &= (2x + 1)(5x + 2) \end{aligned}$$

← 提出公因式 $(2x + 1)$


5. $13(7x - 5) - 2x(7x - 5)$

解：

$$13(7x - 5) - 2x(7x - 5)$$

$$=$$

← 提出公因式 $(7x - 5)$

學生練習 

請利用提公因式法做下列各式的因式分解：

1. $x^2 + 8x$

x^2 和 $8x$ 有公因式

2. $7x - x^2$

$7x$ 和 x^2 有公因式

3. $-2x + 7x^2$

4. $5x + 4x^2$

5. $3x(x - 5) + 2(x - 5)$

$3x(x - 5)$ 和 $2(x - 5)$ 有公因式_____

6. $3(x - 5) - 2x(x - 5)$

7. $6(3x - 5) - x(3x - 5)$

老師講解(第二關)



利用提公因式法因式分解下列各題：

1. $(x+5)^2 + 3(x+5)$

解：

$$\begin{aligned} & (x+5)^2 + 3(x+5) \\ &= (x+5) \cdot (x+5) + 3 \cdot (x+5) \\ &= (x+5)[(x+5) + 3] \\ &= (x+5)(x+8) \end{aligned}$$

有公因式 $(x+5)$

提出 $(x+5)$ ，前項還留 $(x+5)$ ，

後項還留 3 ，”+”不變

$[(x+5) + 3]$ 化簡成 $(x+8)$

2. $(2x+3)^2 - 24(2x+3)$

解：

$$\begin{aligned} & (2x+3)^2 - 24(2x+3) \\ &= (2x+3) \cdot (2x+3) - 24 \cdot (2x+3) \\ &= (2x+3)[(2x+3) - 24] \\ &= (2x+3)(2x-21) \end{aligned}$$

有公因式 $(2x+3)$

提出 $(2x+3)$ ，前項還留

$(2x+3)$ ，後項還留 24 ，”-”不變

$[(2x+3) - 24]$ 化簡成 $(2x-21)$

3. $(x+2)(2x-1) + (x+2)(x+5)$

解：

$$\begin{aligned} & (x+2)(2x-1) + (x+2)(x+5) \\ &= (x+2)[(2x-1) + (x+5)] \\ &= (x+2)(3x+4) \end{aligned}$$

有公因式 $(x+2)$

提出 $(x+2)$ ，前項還留

$(2x-1)$ ，後項還留 $(x+5)$ ，”+”不變

$[(2x-1) + (x+5)]$ 化簡成 $(3x+4)$

學生練習



請利用提公因式法做下列各式的因式分解：

1. $(x+1)^2 + 3(x+1)$

2. $(2x+1)^2 + 3x(2x+1)$

3. $(x+1)(x-1) - 2(x-1)$

4. $(x+1)(x-2) - 4(x-2)$

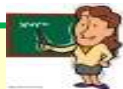
5. $x(x+1) + x(x-3)$

6. $8(2x+5) + (2x+5)^2$

7. $(x-3)(x+1) + x(x-3)$

8. $7(3x-4) + (3x-4)^2$

老師講解(第三關)



利用提公因式法因式分解下列各題：

1. $x^2 + x$

$$\begin{aligned} \text{解：} \quad & x^2 + x \\ & = x \cdot \underline{x} + \underline{1} \cdot \underline{x} \\ & = \underline{x} (\underline{x} + \underline{1}) \end{aligned}$$



小叮嚀：

x 前面沒有寫數字，並不是代表係數是 0 喔！
 x 是 $1 \cdot x$ 的簡記啦！

2. $(x+1)^2 + (x+1)$

$$\begin{aligned} \text{解：} \quad & (x+1)^2 + (x+1) \\ & = (x+1) \cdot \underline{(x+1)} + \underline{1} \cdot \underline{(x+1)} \\ & = \underline{(x+1)} [\underline{(x+1)} + \underline{1}] \\ & = \underline{(x+1)}(x+2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3\underline{x} &= 3 \cdot \underline{x} \\ -2\underline{x} &= (-2) \cdot \underline{x} \\ \underline{x} &= \underline{1} \cdot \underline{x} \\ \underline{(x+1)} &= \underline{1} \cdot \underline{(x+1)} \end{aligned}$$

3. $(3x+2)^2 - (3x+2)$

$$\begin{aligned} \text{解：} \quad & (3x+2)^2 - (3x+2) \\ & = (3x+2) \cdot \underline{(3x+2)} - \underline{1} \cdot \underline{(3x+2)} \\ & = \underline{(3x+2)} [\underline{\quad\quad\quad} - \underline{\quad\quad\quad}] \\ & = \underline{(3x+2)}(\underline{\quad\quad\quad}) \end{aligned}$$

學生練習



請利用提公因式法做下列各式的因式分解：

1. $x^2 - x$

2. $x + x^2$

3. $x - 3x^2$

4. $(2x+1)^2 + (2x+1)$

5. $(7x+2)^2 - (7x+2)$

6. $(x+1)(x-2) - (x-2)$

7. $(3x-1) + (x+2)(3x-1)$

8. $(2x-5) - x(2x-5)$

9. $x(2x-5) - x$

學生練習



1. 請填完下列空格：

(1)	$5-x = -(\underline{x} - \underline{\quad})$	(2)	$7-2x = -(\underline{\quad} - \underline{\quad})$
(3)	$3-3x = -(\underline{\quad} - \underline{\quad})$	(4)	$1-4x = -(\underline{\quad} - \underline{\quad})$
(5)	$6x-5 = -(\underline{5} - \underline{\quad})$	(6)	$3-4x = -(\underline{\quad} - \underline{\quad})$
(7)	$5x-1 = -(\underline{\quad} - \underline{\quad})$		

2. 回答下列問題：

(1) $x-3$ 是 $(x+2)(3-x)$ 的因式嗎？

(2) $x-3$ 是 $2(x-3)$ 與 $(x+2)(3-x)$ 的公因式嗎？

老師講解(第四關)



利用提公因式法因式分解下列各題：

1. $x(x-3)-(3-x)$

解： $x(x-3)-(3-x)$

$= x(x-3) - [- (x-3)]$

$= x(x-3) + (x-3)$

$= x(x-3) + 1 \cdot (x-3)$

$= (x-3)(x+1)$

$-[-(x-3)]$

$= +(x-3)$



小叮嚀：別忘了，
 $(x-3) = 1 \cdot (x-3)$

$$2. \quad 2x(3x-5) + (5-3x)$$

$$\text{解：} \quad 2x(3x-5) + (5-3x)$$

$$= 2x(3x-5) + [- (3x-5)]$$

$$= 2x(3x-5) - (3x-5)$$

$$= 2x(3x-5) - 1 \cdot (3x-5)$$

$$= (3x-5)(2x-1)$$

$$\begin{aligned} &+ [- (3x-5)] \\ &= - (3x-5) \end{aligned}$$

小叮嚀：別忘了，
 $(3x-5) = 1 \cdot (3x-5)$



$$3. \quad -2x(x-7) + (7-x)$$

$$\text{解：} \quad -2x(x-7) + (7-x)$$

$$= -2x(x-7) + [- (\underline{\quad} - \underline{\quad})]$$

$$= -2x(x-7) - (\underline{\quad} - \underline{\quad})$$

$$= -2x(x-7) - 1 \cdot (\underline{\quad} - \underline{\quad})$$

$$= (x-7)(\underline{\quad})$$

$$4. \quad 2x(x-4) - (4-x)$$

$$\text{解：} \quad 2x(x-4) - (4-x)$$

$$= 2x(x-4) + [- (\underline{\quad} - \underline{\quad})]$$

$$= \underline{\hspace{4cm}}$$

$$= \underline{\hspace{4cm}}$$

$$=$$

學生練習



利用提公因式法因式分解下列各題：

1. $x(x-5)-(5-x)$

2. $(x-1)(x-4)-(4-x)$

3. $x(2x-13)-(13-2x)$

4. $3x(4x-5)-(5-4x)$

5. $-7x(x-8)-(8-x)$

6. $-8x(6x-7)-(7-6x)$



可是老爸， $(3-5)^2$ 和 $(5-3)^2$ 的結果都是 4，都一樣耶，剛剛不是說減法前後交換要多一個負號嗎？

喔，你說這個啊！注意看！



$(3-5)^2$ 可以寫成 $(3-5) \cdot (3-5)$

|| || ←

每個括號裡的前後項對調都會多 1 個負號

$$[-(5-3)] \cdot [-(5-3)] = (5-3)^2$$

那兩個括號裡的前後項對調就會....

就會多 2 個負號，而負數乘以負數得到正數，正號又可省略！所以...



$(3-5)^2 = (-2)^2 = 4$	$(150-100)^2 = (50)^2 = 2500$	$(1-x)^2$
$(5-3)^2 = (2)^2 = 4$	$(100-150)^2 = (-50)^2 = 2500$	$(x-1)^2$

沒錯！以此類推我們就可以得到：



$$(1-2x)^2 = (2x-1)^2$$

$$(6-x)^2 = (x-6)^2$$

$$(7-3x)^2 = (3x-7)^2$$

$$(1-5x)^2 = (5x-1)^2$$

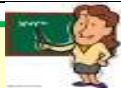
學生練習



下列哪些等式必定正確？是的請打 O，否的請打 X。

____(1)	$x - 7 = 7 - x$	____(4)	$(2 - 3x)^2 = (3x - 2)^2$
____(2)	$x - 7 = -(7 - x)$	____(5)	$(5 + 6x)^2 = (6x + 5)^2$
____(3)	$(x - 7)^2 = -(7 - x)^2$	____(6)	$-[-(x - 9)] = +(x - 9)$

老師講解(第五關)



利用提公因式法因式分解下列各題：

1. $(x-3)^2 - (3-x)$

解： $(x-3)^2 - (3-x)$

$= (x-3)^2 - [- (x-3)]$

$= (x-3)^2 + (x-3)$

$= (x-3)^2 + 1 \cdot (x-3)$

$= (x-3)[(x-3) + 1]$

$= (x-3)(x-2)$

$-[-(x-3)]$
 $= + (x-3)$

小叮嚀：別忘了
 $(x-3) = 1 \cdot (x-3)$



上面的做法只是其中一種，我們剛剛不是才講完 $(x-3)^2 = (3-x)^2$ 嗎？

所以 $(x-3)^2 - (3-x)$ 的因式分解你也可以這樣做：

$$\begin{aligned}
 \text{解：} & \quad (x-3)^2 - (3-x) \\
 & = (3-x)^2 - (3-x) \\
 & = (3-x) \cdot (3-x) - 1 \cdot (3-x) \\
 & = (3-x)[(3-x) - 1] \\
 & = (3-x)(2-x)
 \end{aligned}$$

小叮嚀：別忘了，
 $(3-x) = 1 \cdot (3-x)$



是耶！而且我還知道
 $(x-3)(x-2) = (3-x)(2-x)$

2. $(7x-3) + (3-7x)^2$

$$\begin{aligned}
 \text{解：} & \quad (7x-3) + (3-7x)^2 \\
 & = (7x-3) + (7x-3)^2 \\
 & = 1 \cdot (7x-3) + (7x-3) \cdot (7x-3) \\
 & = (7x-3)[1 + (7x-3)] \\
 & = (7x-3)(7x-2)
 \end{aligned}$$

$$(3-7x)^2 = (7x-3)^2$$

小叮嚀：別忘了，
 $(7x-3) = 1 \cdot (7x-3)$



3. $(5x-7)^2 - (7-5x)$

$$\begin{aligned}
 \text{解：} & \quad (5x-7)^2 - (7-5x) \\
 & = (7-5x)^2 - (7-5x) \\
 & =
 \end{aligned}$$

$$4. (2x-1)^2 + 5(1-2x)$$

$$\begin{aligned} \text{解：} & (2x-1)^2 + 5(1-2x) \\ & = (1-2x)^2 + 5(1-2x) \\ & = \end{aligned}$$

$$5. (8x+9)^2 - 3(9+8x)$$

$$\begin{aligned} \text{解：} & (8x+9)^2 - 3(9+8x) \\ & = (8x+9)^2 - 3(8x+9) \\ & = \end{aligned}$$

學生練習



請利用提公因式法做下列各式的因式分解：

$$1. (2x-3)^2 - (3-2x)$$

$$2. (x-5) - (5-x)^2$$

$$3. (6x-13)^2 - 7(13-6x)$$

$$4. (x-7)^2 + 3(7-x)$$

$$5. (2x-7)^2 - 3(7-2x)$$

好了好了，時候不早了，該睡了吧~

好吧！明天我還要
再聽一個故事！！

