

單元五 因式、倍式與因式分解

主題一 整除

【第一幕】

陳爸很喜歡和小孩談數學，有一天…

小貝， $12 \div 3 = ?$

4 啊！怎麼了？

餘數是多少？

0 啊！又怎麼了？

$12 \div 3 = 4$ ，餘 0，我們就說可以「整除」。


那我們正在學的多項式除法是不是也可以這樣說？

是的！

像 $(6x^2 + 7x - 5) \div (2x - 1)$ 的商 $3x + 5$ ，餘式 0，我們就說可以「整除」。

像 $(6x^2 + 7x - 6) \div (2x - 1)$ 的商 $3x + 5$ ，餘式 -1 ，不是 0，

我們就說不能整除。



學生練習

下列各多項式除法是否可以整除？

1. $(3x^2 - x - 4) \div (x + 1)$

2. $(5x^2 - 4x - 3) \div (5x + 1)$

3. $(x^2 - 4) \div (x - 2)$

4. $(2x^2 - 6x) \div (2x)$

主題二 因式、倍式

【第二幕】

又有一天...



小音， $12 \div 3 = 4 \cdots \text{餘} 0$

是啊，可以整除啊，
怎麼了？

給你看這個表，空格應該填什麼？



| 整數 | 多項式 |
|--|---|
| $12 \div 3 = 4 \cdots \text{餘數} 0$ 可以整除 | $(6x^2 + 7x - 5) \div (2x - 1) = 3x + 5 \cdots \text{餘式} 0$ 可以整除 |
| 12 是 3 的倍數 | $(6x^2 + 7x - 5)$ 是 $(2x - 1)$ 的_____ |
| 3 是 12 的因數 | $(2x - 1)$ 是 $(6x^2 + 7x - 5)$ 的_____ |



哦！原來爸爸是要教弟弟因式、倍式哦！
跟被除式、除式一起記比較好記！

被除式

除式

$$(6x^2 + 7x - 5) \div (2x - 1) = 3x + 5 \cdots \text{餘式} 0$$

$6x^2 + 7x - 5$ 是 $2x - 1$ 的倍式

都是ㄅㄟ、
嘛！

反過來

$2x - 1$ 是 $6x^2 + 7x - 5$ 的因式


 學生練習

下列各題的選項中，哪些是正確的？正確的請打✓，錯誤的請打✗。

1. 已知 $18 \div 3 = 6$ 。

- (1) 18 是 3 的倍數 (2) 3 是 18 的倍數
 (3) 18 是 3 的因數 (4) 3 是 18 的因數

2. 已知 $(12x^2 - 11x + 2) \div (3x - 2)$ 的餘式 0。


- (1) $3x - 2$ 是 $12x^2 - 11x + 2$ 的倍式
 (2) $3x - 2$ 是 $12x^2 - 11x + 2$ 的因式
 (3) $12x^2 - 11x + 2$ 是 $3x - 2$ 的倍式
 (4) $12x^2 - 11x + 2$ 是 $3x - 2$ 的因式

3. 已知 $(-8x^2 + 11x) \div (4x)$ 可以整除。

- (1) $4x$ 是 $-8x^2 + 11x$ 的倍式
 (2) $-8x^2 + 11x$ 是 $4x$ 的倍式
 (3) $4x$ 是 $-8x^2 + 11x$ 的因式
 (4) $-8x^2 + 11x$ 是 $4x$ 的因式

4. 已知 $(7x^2 + 13x - 2) \div (5x + 2)$ 的餘式不為 0。

- (1) $(7x^2 + 13x - 2) \div (5x + 2)$ 不能整除
 (2) $5x + 2$ 不是 $7x^2 + 13x - 2$ 的因式
 (3) $5x + 2$ 是 $7x^2 + 13x - 2$ 的因式
 (4) $7x^2 + 13x - 2$ 是 $5x + 2$ 的倍式


 老師講解

1. $x+2$ 是否為 $x^2-5x-14$ 的因式？

解：

算看看 $(x^2-5x-14) \div (x+2)$ 的
餘式是不是 0？

$$\begin{array}{r} x \quad -7 \\ x+2 \overline{) x^2-5x-14} \\ \underline{x^2+2x} \\ -7x-14 \\ \underline{-7x-14} \\ 0 \end{array}$$

2. x^2-4x+4 是否為 $x-2$ 的倍式？

解：

算看看 $(x^2-4x+4) \div (x-2)$ 的
餘式是不是 0？

$$x-2 \overline{) x^2-4x+4}$$


 學生練習

1. $x-3$ 是 $2x^2-6x+3$ 的因式嗎？

2. $2x^2-3x+1$ 是否為 $2x-1$ 的倍式？

【第三幕】

某個周末午後…

$6 \div 3 = 2$ ，是吧！



是的！餘數是 0，所以可以整除，同時可以知道 6 是 3 的倍數，3 是 6 的因數！還有嗎？



恩，真好！
那我問妳，
2 是 6 的因數嗎？

$6 \div 2 = 3$ ，餘數是 0，所以可以整除。
啊！我知道了！
2 和 3 都是 6 的因數。



那妳看這兩個多項式除法

$$\begin{array}{r} 3x + 5 \\ 2x - 1 \overline{) 6x^2 + 7x - 5} \\ \underline{6x^2 - 3x} \\ 10x - 5 \\ \underline{10x - 5} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2x - 1 \\ 3x + 5 \overline{) 6x^2 + 7x - 5} \\ \underline{6x^2 + 10x} \\ -3x - 5 \\ \underline{-3x - 5} \\ 0 \end{array}$$



$(6x^2 + 7x - 5) \div (2x - 1) = 3x + 5$ ，餘式 0，
 $(6x^2 + 7x - 5) \div (3x + 5) = 2x - 1$ ，餘式 0，
我知道了！
2x - 1 和 3x + 5 都是 $6x^2 + 7x - 5$ 的因式！



是的，只要可以整除，除式和商都是被除式的因式。

學生練習



下列各題的選項中，哪些是正確的？正確的請打✓，錯誤的請打✗。

1. 已知 $100 \div 25 = 4$ 。

- ___(1) 25 是 100 的因數
- ___(2) 4 是 100 的倍數
- ___(3) 4 是 100 的因數
- ___(4) 100 是 4 的倍數

2. 已知 $(6x^2 - x - 12) \div (2x - 3) = 3x + 4$ 。

- ___(1) $6x^2 - x - 12$ 是 $3x + 4$ 的倍式
- ___(2) $6x^2 - x - 12$ 是 $2x - 3$ 的倍式
- ___(3) $2x - 3$ 是 $6x^2 - x - 12$ 的因式
- ___(4) $3x + 4$ 是 $6x^2 - x - 12$ 的因式

3. 已知 $(-7x^2 + 5x) \div (-x) = 7x - 5$ 。

- ___(1) $-7x^2 + 5x$ 是 $7x - 5$ 的倍式
- ___(2) $7x - 5$ 是 $-7x^2 + 5x$ 的因式
- ___(3) $-x$ 是 $-7x^2 + 5x$ 的因式
- ___(4) $-7x^2 + 5x$ 是 $-x$ 的倍式

4. 已知 $(-9x^2 - 3x + 20) \div (-3x + 4)$ 的商為 $3x + 5$ ，餘式 0。

- ___(1) $-9x^2 - 3x + 20$ 是 $-3x + 4$ 的倍式
- ___(2) $-9x^2 - 3x + 20$ 是 $3x + 5$ 的倍式
- ___(3) $3x + 5$ 是 $-9x^2 - 3x + 20$ 的因式
- ___(4) $-3x + 4$ 是 $-9x^2 - 3x + 20$ 的因式

【第四幕】

陰雨綿綿的假日…

Man: $7 \div 3 = 2 \cdots \text{餘 } 1$ ，
是 吧！

Girl: 是 啊！餘數不是 0，不能整除 啊！

Man: $7 = 3 \times 2 + 1$ ，是 吧！

Girl: 這不就是利用「被除數 = 除數 \times 商 + 餘數」嗎？

Girl: 又 怎 樣？


Man: 是 啊！不一 樣 了 哦！樣 子 改 變 了！天 氣 也 改 變 了。

Man: $6 \div 3 = 2$ ，可以改成 $6 = 3 \times 2$ ，3 和 2 都是 6 的因數。

Man: 這 也 是 利 用「被除數 = 除數 \times 商 + 餘數」，
只 是 因 為 餘 數 0，+ 0 可 不 寫。

Man: *gooooood!* 多 項 式 時 …

Girl: 把 拔！我 知 道，「被除式 = 除式 \times 商 + 餘式」！


 老師講解

計算下列各題，並寫為「被除式=除式×商+餘式」的形式。

1. $(6x^2 - x + 2) \div (2x - 3)$

被除式為：_____

除式為：_____

商為：_____

餘式為：_____

$$\begin{array}{r}
 3x \quad +4 \\
 \hline
 2x-3 \overline{) 6x^2 - x + 2} \\
 \underline{6x^2 - 9x} \\
 8x + 2 \\
 \underline{8x - 12} \\
 14
 \end{array}$$

所以 $6x^2 - x + 2 =$ _____

2. $(-3x^2 + 7x - 2) \div (-x + 2)$

被除式為：_____


除式為：_____

商為：_____

餘式為：_____

$$\begin{array}{r}
 3x \quad -1 \\
 \hline
 -x+2 \overline{) -3x^2 + 7x - 2} \\
 \underline{-3x^2 + 6x} \\
 x - 2 \\
 \underline{x - 2} \\
 0
 \end{array}$$

所以 $-3x^2 + 7x - 2 =$ _____


 學生練習

計算下列各題，並寫為「被除式=除式×商+餘式」的形式。

1. $(-4x^2 + 4x - 5) \div (2x - 1)$

被除式為：_____

除式為：_____

商為：_____

餘式為：_____

$$\begin{array}{r}
 -2x \quad +1 \\
 \hline
 2x-1 \overline{) -4x^2 + 4x - 5} \\
 \underline{-4x^2 + 2x} \\
 2x - 5 \\
 \underline{2x - 1} \\
 -4
 \end{array}$$

所以 $-4x^2 + 4x - 5 =$ _____

2. $(6x^2 - 7x - 3) \div (3x + 1)$

被除式為：_____

除式為：_____

商為：_____

餘式為：_____

所以 _____ = _____

3. $(-x^2 + x - 4) \div (x + 1)$

被除式為：_____

除式為：_____

商為：_____

餘式為：_____

所以 _____ = _____

4. $(5x^2 - 9x) \div x$

被除式為：_____

除式為：_____

商為：_____

餘式為：_____

所以 _____ = _____

5. $(7x^2) \div x$

老師講解



1. 已知 $91 = 13 \times 7$ ，下列哪些是正確的？請打 \surd 。

___(1) 13 是 91 的因數

___(2) 7 是 91 的因數

___(3) 91 是 13 的因數

___(4) 91 是 7 的因數

2. 已知 $-35x^2 - x + 6 = (-5x + 2)(7x + 3)$ ，下列哪些是正確的？請打 \surd 。

___(1) $(-35x^2 - x + 6) \div (-5x + 2)$ 的餘式為 0

___(2) $(-35x^2 - x + 6) \div (7x + 3) = -5x + 2$

___(3) $-5x + 2$ 是 $-35x^2 - x + 6$ 的因式

___(4) $7x + 3$ 是 $-35x^2 - x + 6$ 的因式

3. 已知 $8x^2 + 3x = x(8x + 3)$ ，下列哪些是正確的？請打 \surd 。

___(1) x 是 $8x^2 + 3x$ 的因式

___(2) $8x + 3$ 是 $8x^2 + 3x$ 的因式

___(3) $8x^2 + 3x$ 是 x 的因式

___(4) $(8x^2 + 3x) \div (8x + 3)$ 不能整除

4. 已知 $5x^2 + ax + b = (x + 2)(5x - 3)$ ，下列哪些是正確的？請打 \surd 。

___(1) $x + 2$ 是 $5x^2 + ax + b$ 的因式

___(2) $5x - 3$ 是 $5x^2 + ax + b$ 的因式

___(3) $5x^2 + ax + b$ 是 $x + 2$ 的因式

___(4) $5x^2 + ax + b$ 是 $5x - 3$ 的因式


 學生練習

下列各題的選項中，哪些是正確的？正確的請打✓，錯誤的請打✗。

1. 已知 $95 = 5 \times 19$ 。

- ___(1) 5 和 19 都是 95 的因數
 ___(2) 只有 5 是 95 的因數，19 不是 95 的因數
 ___(3) 只有 19 是 95 的因數，5 不是 95 的因數

2. 已知 $24x^2 + 2x - 15 = (4x - 3)(6x + 5)$ 。

- ___(1) $4x - 3$ 是 $24x^2 + 2x - 15$ 的因式
 ___(2) $6x + 5$ 是 $24x^2 + 2x - 15$ 的因式
 ___(3) $(24x^2 + 2x - 15) \div (4x - 3) = 6x + 5$
 ___(4) $(24x^2 + 2x - 15) \div (6x + 5)$ ，可以整除

3. 已知 $9x^2 - 14x = x(9x - 14)$ 。

- ___(1) x 和 $9x - 14$ 都是 $9x^2 - 14x$ 的因式
 ___(2) 只有 $9x - 14$ 是 $9x^2 - 14x$ 的因式， x 不是 $9x^2 - 14x$ 的因式
 ___(3) $(9x^2 - 14x) \div (9x - 14) = x$
 ___(4) $(9x^2 - 14x) \div x$ 不能整除

4. 已知二次多項式 $ax^2 + bx - 27 = (-8x + 3)(7x - 9)$ 。

- ___(1) $-8x + 3$ 是 $ax^2 + bx - 27$ 的因式
 ___(2) $7x - 9$ 是 $ax^2 + bx - 27$ 的因式
 ___(3) $(ax^2 + bx - 27) \div (-8x + 3)$ 的餘式為 0
 ___(4) $(ax^2 + bx - 27) \div (7x - 9)$ 的餘式不為 0

主題三 因式分解

【第五幕】

晴空萬里…



$21 = 3 \times 7$ ，3 與 7 都是 21 的因數，
所以說 3×7 是 21 的因數分解。

這不是以前學過的
標準分解式嗎？



是啊！多項式也差不多
是這樣。

改叫因式分解就可
以了吧？



對的，像 $24x^2 + 2x - 15 = (4x - 3)(6x + 5)$ ，
 $4x - 3$ 與 $6x + 5$ 都是 $24x^2 + 2x - 15$ 的因式，
我們就說 $(4x - 3) \cdot (6x + 5)$ 是 $24x^2 + 2x - 15$ 的因式分解，
也可以說將 $24x^2 + 2x - 15$ 因式分解成 $(4x - 3) \cdot (6x + 5)$ ，記
做 $24x^2 + 2x - 15 = (4x - 3)(6x + 5)$

說那麼多！

以前這樣 $(4x - 3)(6x + 5) = 24x^2 + 2x - 15$ 叫做展開

現在這樣 $24x^2 + 2x - 15 = (4x - 3)(6x + 5)$ 叫做因式
分解。



很不錯哦！

那不就是把一個二次多項
式分解成兩個一次多項式
相乘的樣子。



老師講解 1



1. 已知 $x-1$ 是 $2x^2+x-3$ 的因式，請將 $2x^2+x-3$ 因式分解。

解：

先算出 $(2x^2+x-3) \div (x-1)$ 的商

$$(2x^2+x-3) \div (x-1) = \underline{\hspace{2cm}}$$

所以 $2x^2+x-3 = \underline{\hspace{2cm}}$

$$\begin{array}{r} 2x \quad +3 \\ x-1 \overline{) 2x^2 + x - 3} \\ \underline{2x^2 - 2x} \\ 3x - 3 \\ \underline{3x - 3} \\ 0 \end{array}$$

2. 已知 $3x^2+2x-8$ 是 $x+2$ 的倍式，請將 $3x^2+2x-8$ 因式分解。

解：

先算出 $(3x^2+2x-8) \div (x+2)$ 的商

$$(3x^2+2x-8) \div (x+2) = \underline{\hspace{2cm}}$$

所以 $3x^2+2x-8 = \underline{\hspace{2cm}}$


$$x+2 \overline{) 3x^2 + 2x - 8}$$

3. 已知 $3x+4$ 是 $9x^2-16$ 的因式，請將 $9x^2-16$ 因式分解。

解：

先算出 $(9x^2-16) \div (3x+4)$ 的商

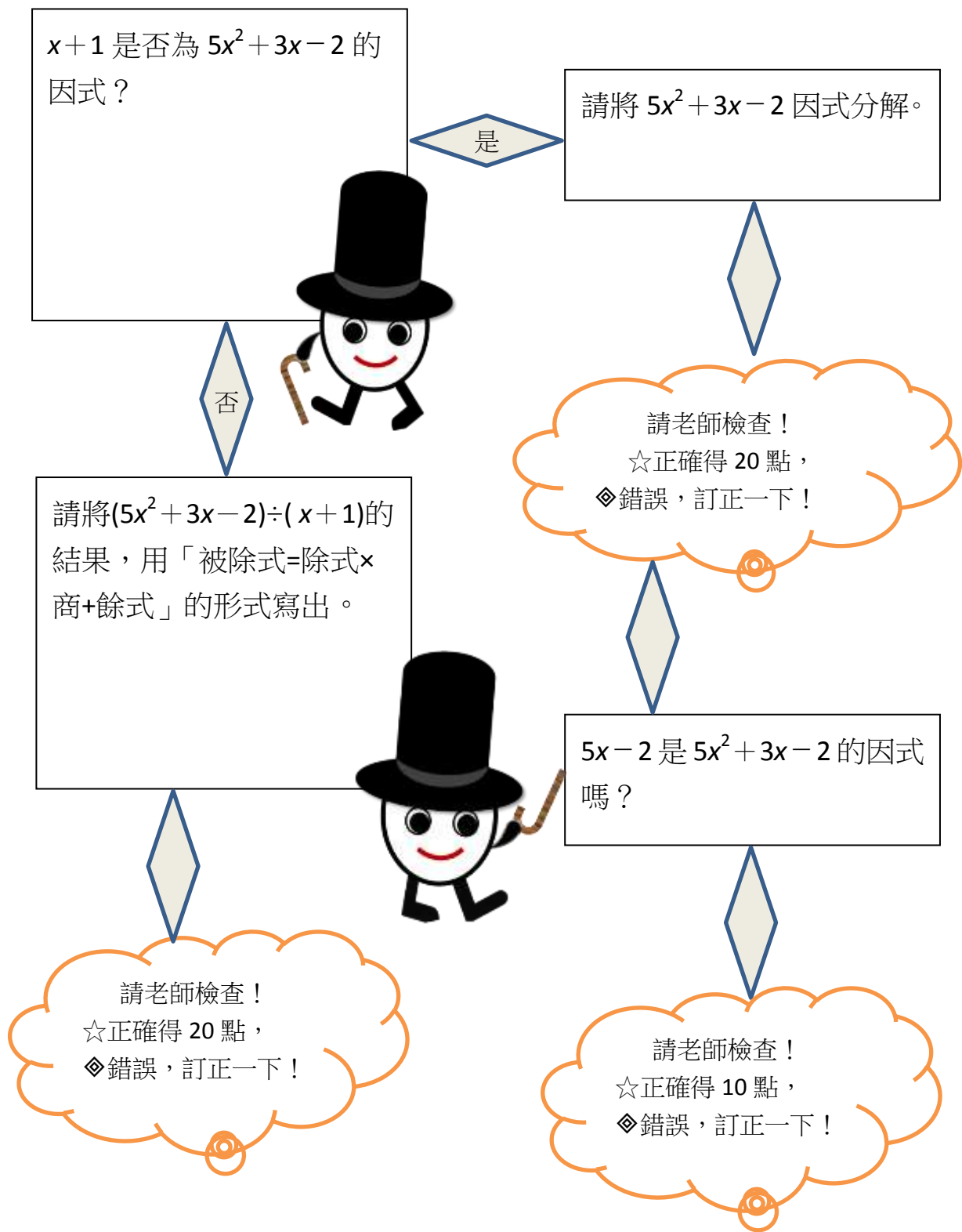
$$3x+4 \overline{) 9x^2 + 0 - 16}$$



學生練習

1. 已知 $x+1$ 是 x^2-4x-5 的因式，請將 x^2-4x-5 因式分解。
2. 已知 $x-2$ 是為 x^2-4x+4 的因式，請將 x^2-4x+4 因式分解。
3. 已知 $6x^2+5x-6$ 是 $2x+3$ 的倍式，請將 $6x^2+5x-6$ 因式分解。
4. 已知 $4x^2-25$ 是 $2x+5$ 的倍式，請將 $4x^2-25$ 因式分解。

【謝幕！】



$(-x^2+4)\div(x-4)$ ，是否能整除？

是

回頭檢查一下



否

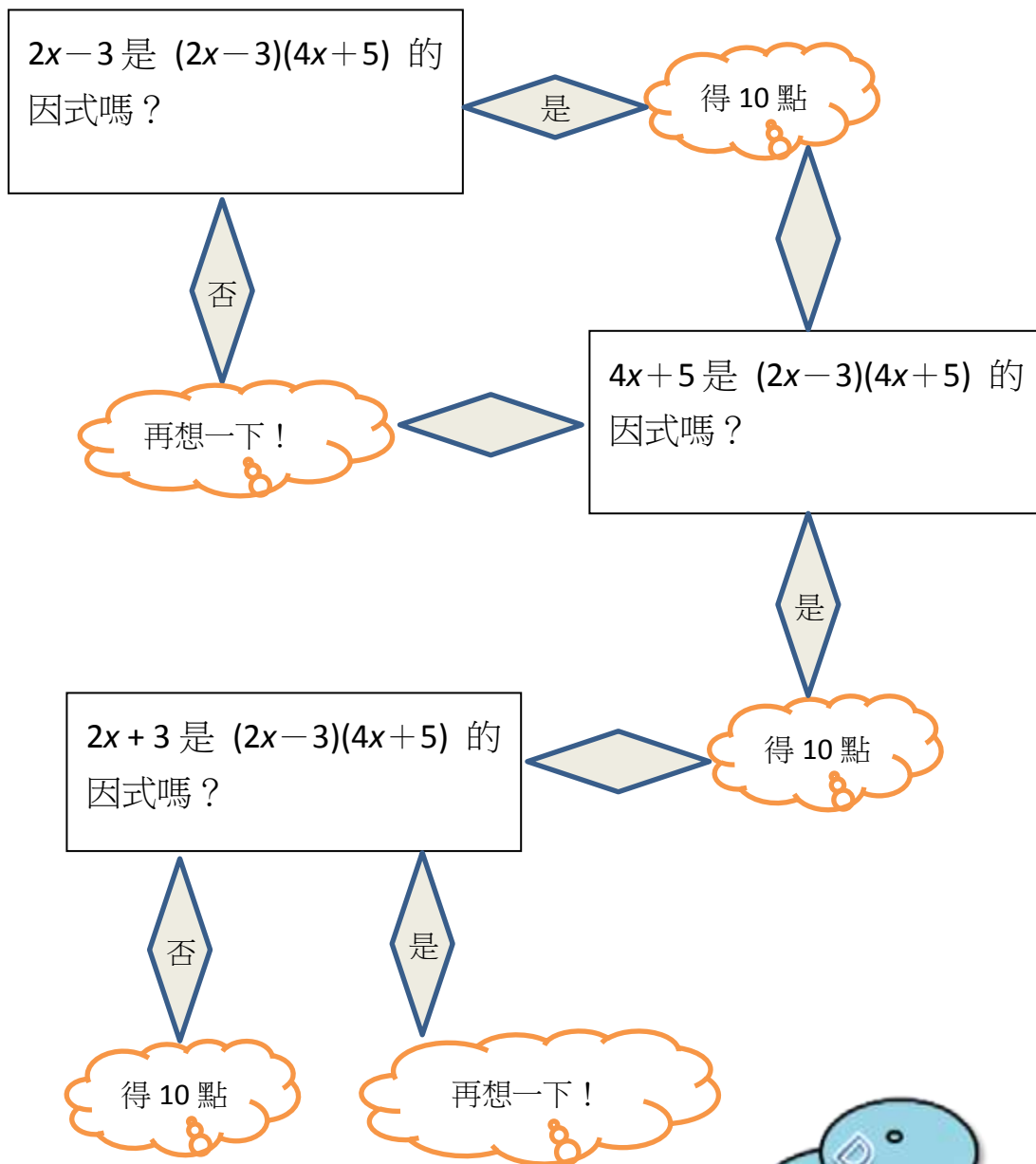
請將 $(-x^2+4)\div(x-4)$ 的結果，用「被除式=除式×商+餘式」的形式寫出。

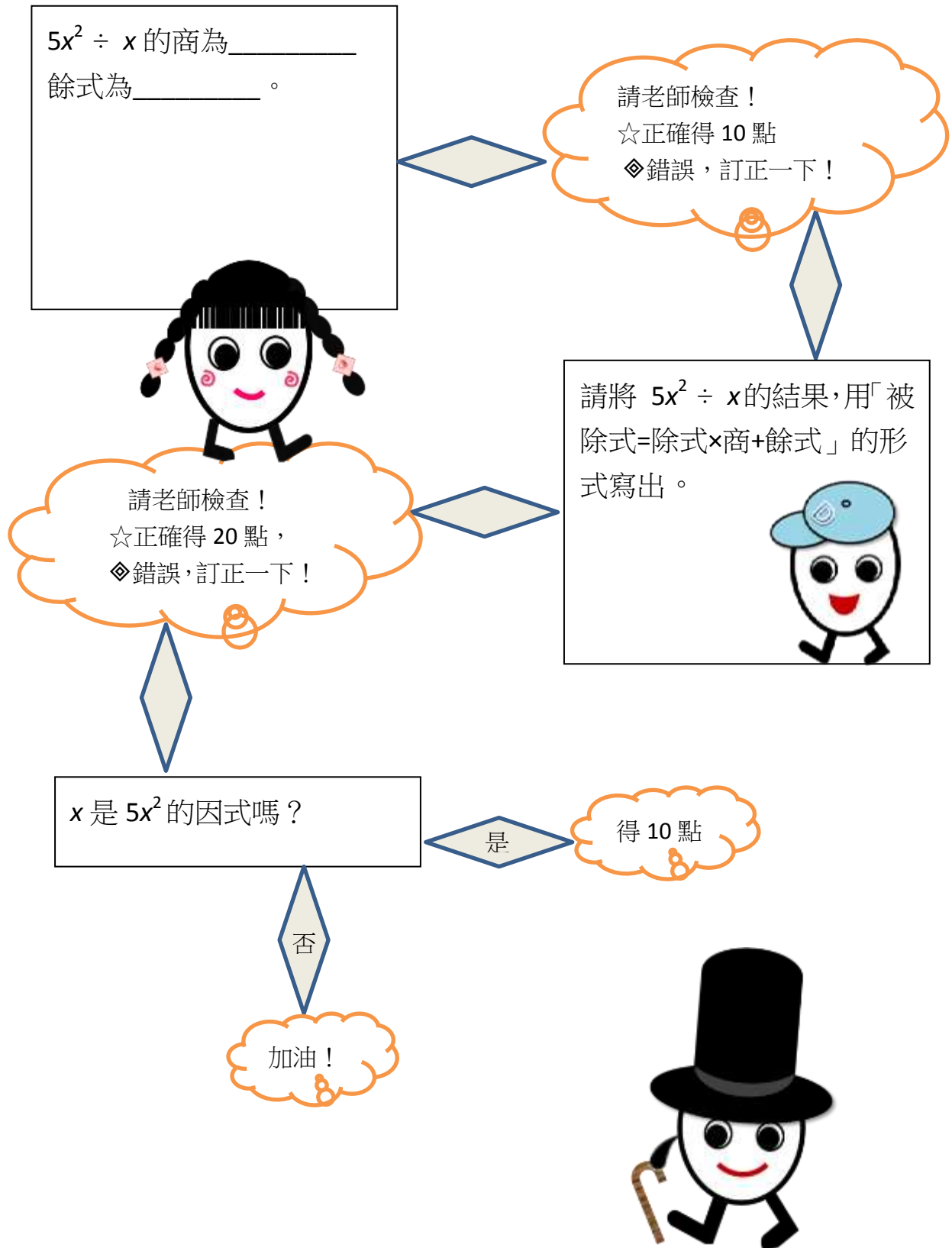
請老師檢查！
☆正確得 20 點，
◇錯誤，訂正一下！

$-x^2+4$ 是 $x-4$ 的倍式嗎？



請老師檢查！
☆正確得 10 點，
◇錯誤，訂正一下！





閉幕前, 最完美的演出! 我共得_____點。