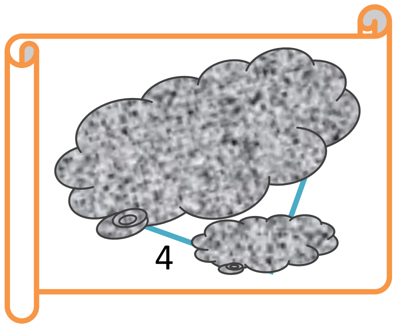
# 單元四　勾股定理與兩點距離

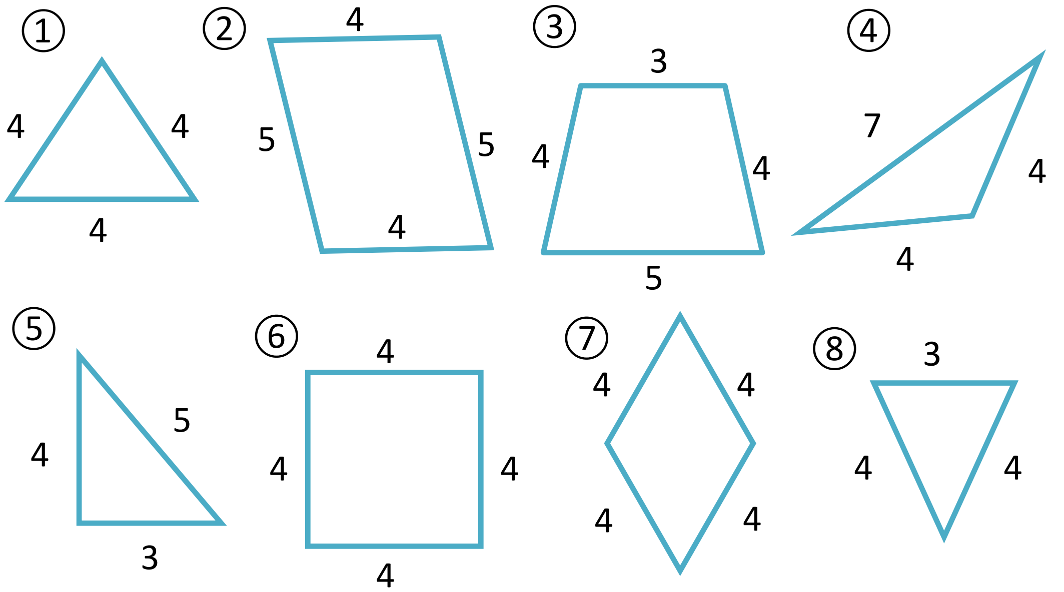
## 主題一　勾股定理

**相傳**很久很久以前，在古老的希臘時代，有個叫畢達哥拉斯的人，他手中有一份藏寶圖但需要解開其中的謎題才能找到最後的寶藏，讓我們來一起幫忙他吧！

$\boxed{\text{謎題一}}$

藏寶圖上重要的線索被汙點遮住了，請試著從下列的碎片中找出能符合藏寶圖上線索的碎片:




$\boxed{\text{謎題二}}$、發現藏寶圖下面還有一些文字:

此碎片的全部邊長分別填入□內可滿足此等式：

$$\square^2 = \square^2 + \square^2$$

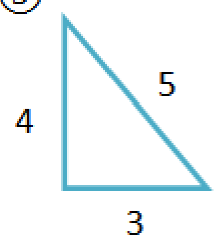
$\boxed{\text{你}}$所找出的是______號碎片，形狀是__________形。

你所填入的數是：$\square^2 = \square^2 + \square^2$

你找對了嗎？答：___________。

《解謎時間》

符合藏寶圖上線索的碎片就是 5 號：邊長 3、4、5 的直角三角形。

⑤


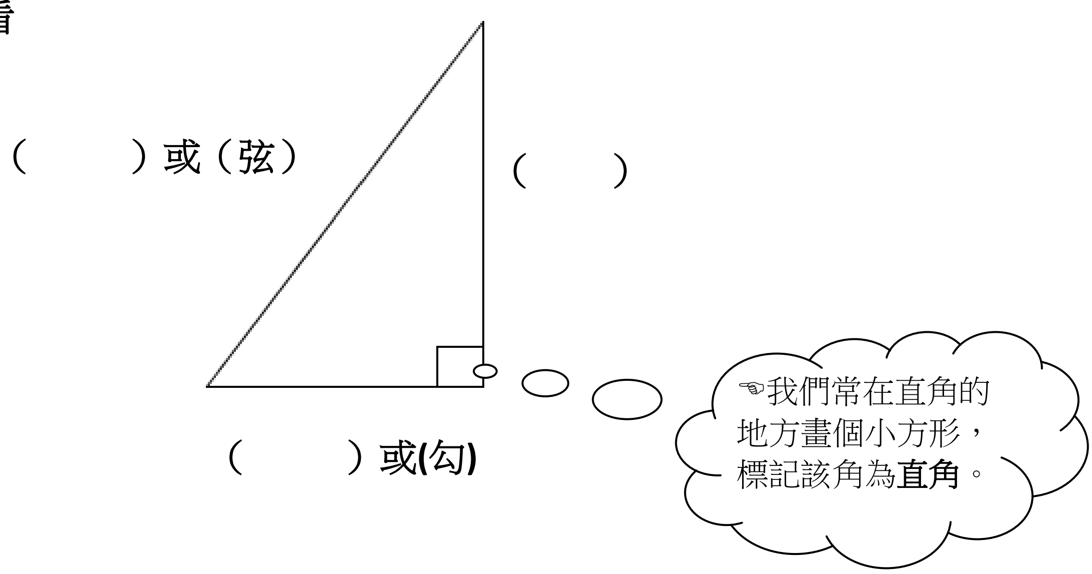

$\boxed{5}^2=\boxed{3}^2+\boxed{4}^2$ 或 $\boxed{5}^2=\boxed{4}^2+\boxed{3}^2$

其實，任何一個直角三角形的三邊長都可滿足$\boxed{\text{謎題二}}$中的等式。

《名詞補給站》

有一個內角為**直角**的三角形稱為**直角三角形**。其中直角所對的邊稱為**斜邊**（也稱**弦**），另外的兩邊稱為**股**，又較短的股也稱為**勾**。

**填填看**



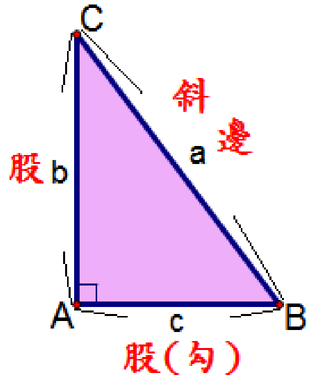
《畢氏定理大現身》

直角三角形的三邊邊長具有一個特質，就是

直角三角形斜邊長的平方等於兩股長的平方和，

稱為**畢氏定理**，又稱**勾股定理**或**商高定理**。即

**斜邊$^2$＝股$^2$＋勾$^2$**或 **斜邊＝$\sqrt{\text{股}^2+\text{勾}^2}$**。




**填填看**

1. 右上圖的直角三角形△ABC 中，∠A＝______°，$\overline{BC}$為_____邊，

   其餘兩邊______與______稱為股，三邊關係為 $a^2$＝___＋___。

2. 下列四組數中有兩組符合畢氏定理的等式，請找出來填入方格。

   (1) 2，3，4 (2) 6，8，10 (3) 5、12、13 (4) 7，10，14

$\square^2 = \square^2 + \square^2$ , $\square^2 = \square^2 + \square^2$

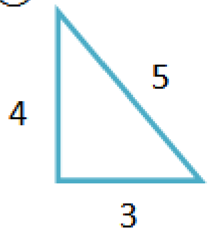
《解謎時間》

謎題二的條件就是畢氏定理的等式，只要形狀是直角三角形的就可以符合。計算如下：

斜邊平方＝$5^2=25$，

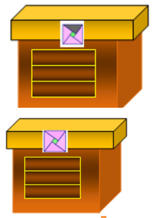
兩股平方和＝$3^2+4^2=9+16=25$

⑤

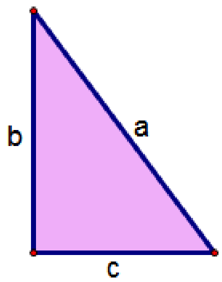


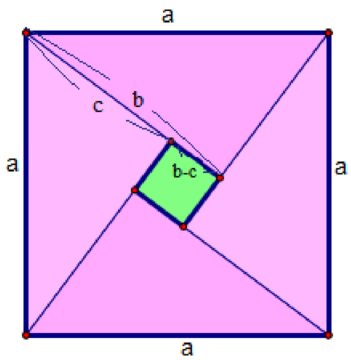
《藏寶圖的秘密》

終於找到了符合藏寶圖上的碎片，把碎片放到了寶箱上，正好補上一個與該碎片完全一樣的缺角，補上去後，順利地打開寶箱。裡面有著一封信，信上寫著:



看到此信，表示你我是有緣之人，相信你一定對剛剛的等式與圖片有所困惑，先讓我告訴你一個秘密吧！
仔細觀察底下的兩個圖形，右邊的正方形是由 4 個左邊的直角三角形所拼成的，且中間有一個小正方形的空隙。




不難發現：**大正方形面積＝四個直角三角形面積＋小正方形面積**

$$a^2=4(\frac{1}{2}bc)+(b-c)^2$$

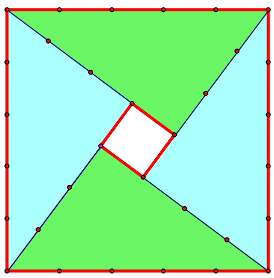
$$a^2=(2bc)+(b^2-2bc+c^2)$$

整理完你會得到 $\mathbf{a^2=b^2+c^2}$

這個祕密被你發現了，其實這是個**知識的藏寶箱**！

**填填看**

右圖是由 4 個邊長是 3、4、5 的直角三角形所拼成的正方形。



**大正方形面積**＝_____×_____＝_____，
**四個直角三角形面積**＝4×($\frac{1}{2}$×_____×_____)＝_____，
**小正方形面積**＝_____×_____＝_____，
以上數據符合信封上所寫的關係嗎？答：_____。

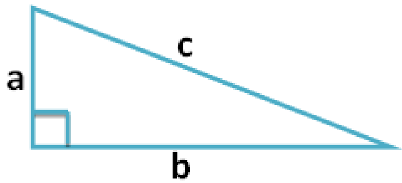
## 小試身手

1. 如圖，a、b、c 分別為直角三角形的三邊長，則下列關係何者正確？

(A) b=$\sqrt{a^2+c^2}$

(B) a=$\sqrt{b^2+c^2}$

(C) c=$\sqrt{a^2+b^2}$



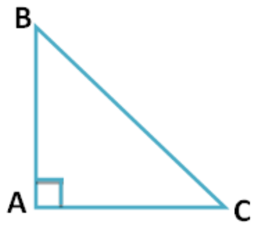

2. 如圖，下列哪個關係式是正確的？

(A) $\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2$

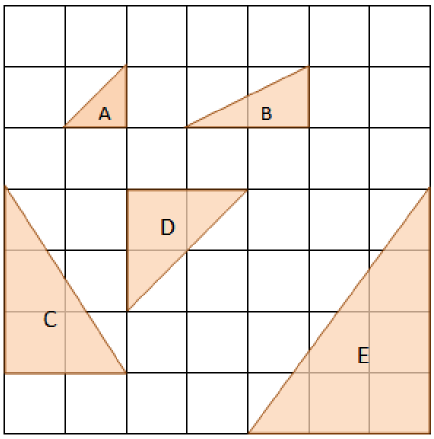
(B) $\overline{AB}^2=\overline{AC}^2-\overline{BC}^2$

(C) $\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2$

(D) $\overline{BC}^2=\overline{AB}^2-\overline{AC}^2$




3. 圖中每個小方格邊長都是 1。




因三角形 A 的兩股長為 1、1，

利用畢氏定理得

A 的斜邊＝$\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$。

請試著算出其他三角形的斜邊長。

B 的斜邊＝$\sqrt{(\quad)^2+(\quad)^2}$＝$\sqrt{(\quad)+(\quad)}=\sqrt{(\quad)}$

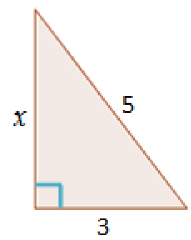
C 的斜邊＝

D 的斜邊＝

E 的斜邊＝

# 主題二 勾股定理的計算

問題 1 圖中直角三角形的斜邊長為 5、一股長為 3，求另一股的長 $x$。




解：根據勾股定理，可列式為 $x^2+3^2=5^2$

$x^2=5^2-3^2$

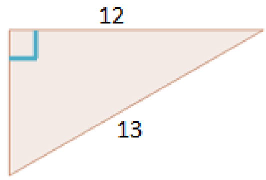
因 $x$ 是正數，故化簡後得

$x=\sqrt{5^2-3^2}=\sqrt{25-9}=\sqrt{16}=4$。

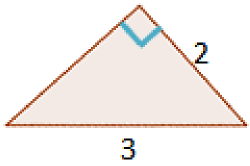
## 小試身手

請試著算出下列三角形另一股的長。

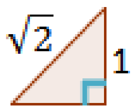
(1) $\sqrt{(\quad)^2-(\quad)^2}=\sqrt{(\ )-(\ )}=\sqrt{(\ )}=(\quad)$。



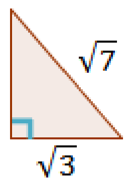

(2)




(3)



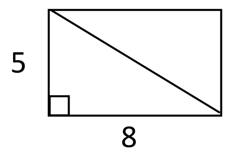

(4)



$\boxed{\text{問題 2}}$若長方形的長為 8，寬為 5，則此長方形對角線的長為多少？

解：如圖，長方形的內角為直角，故長方形的長、寬與對角線形成直角三角形，所以

對角線的長＝$\sqrt{5^2+8^2}=\sqrt{25+64}=\sqrt{89}$ 。



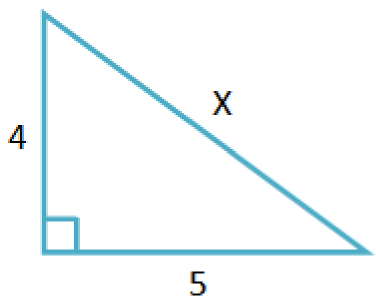

**小試身手**

(1) 若長方形的長為 8，寬為 6，則此長方形對角線的長為多少？

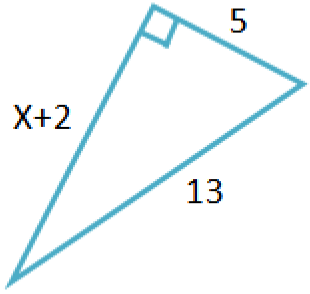
(2) 若長方形的長為 8 *cm*，對角線的長為 9 *cm*，則此長方形的寬為多少？

$\boxed{\text{問題 3}}$請依據圖中所給的三邊長，算出其中$x$的值。

(1) □$x$＝




(2) □$x+2$＝

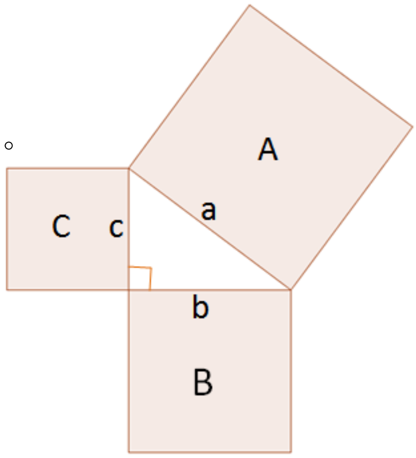



所以□$x$＝

《討論小時間》

如圖，直角三角形，斜邊長為 a、兩股長為 b、c，分別以三邊當做正方形的邊長往外畫出正方形 A、B、C。

思考一下，這三個正方形有何關係呢？




(1) ①利用勾股定理寫出 a、b、c 的關係式。

答：

② A 的面積＝＿＿＿，

B 的面積＝＿＿＿＿，

C 的面積＝＿＿＿＿，

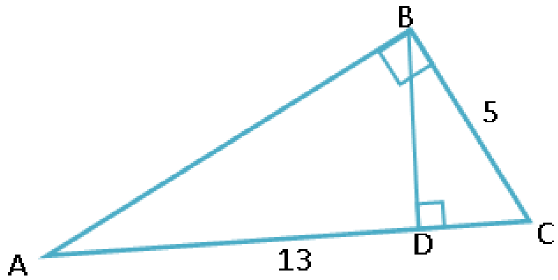
③由①②知：＿＿＿的面積＝＿＿＿的面積＋＿＿＿的面積。

(2) 若 B、C 的面積分別為 4、3，那 A 的面積是多少？

(3) 如果 C 的面積為 9，　A 的面積為 15，那麼 B 的面積為多少？

《挑戰時間》斜邊上的高

如圖，在直角三角形 ABC 中，$\overline{BD}$為斜邊上的高，$\overline{BC}=5$、$\overline{AC}=13$　。




(1) $\overline{AB}=$？

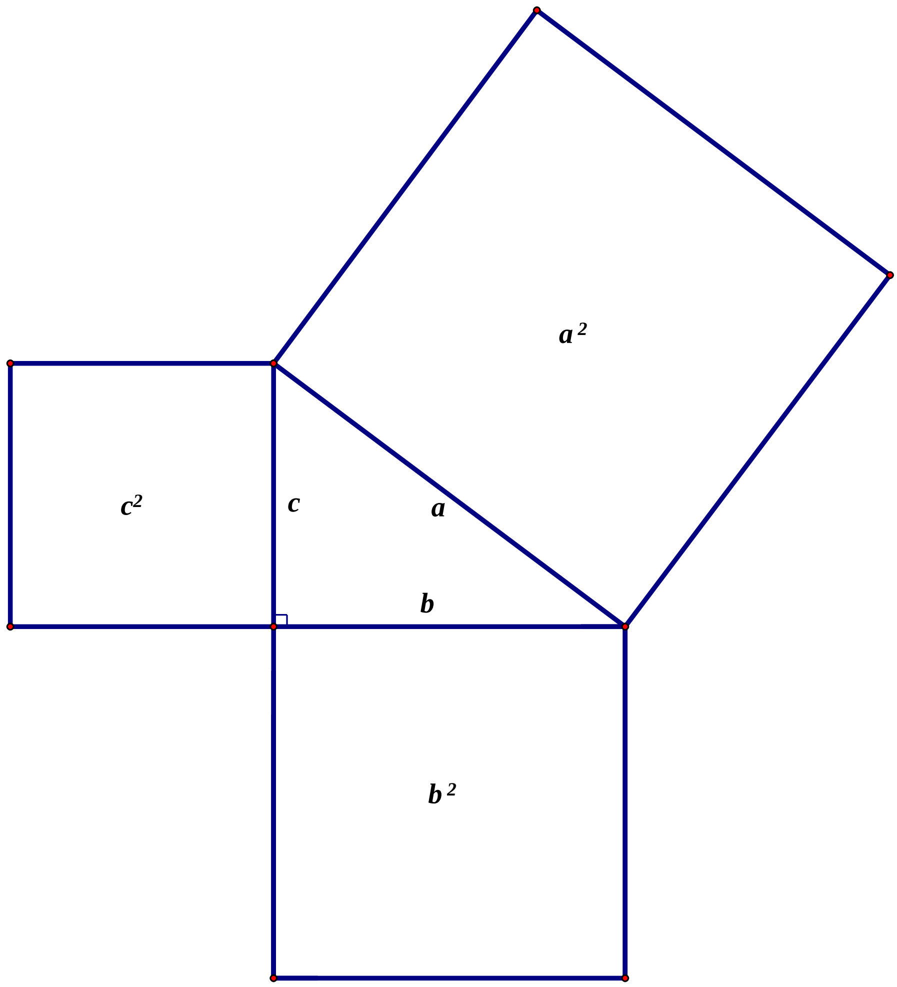
(2) △ABC 面積等於多少？

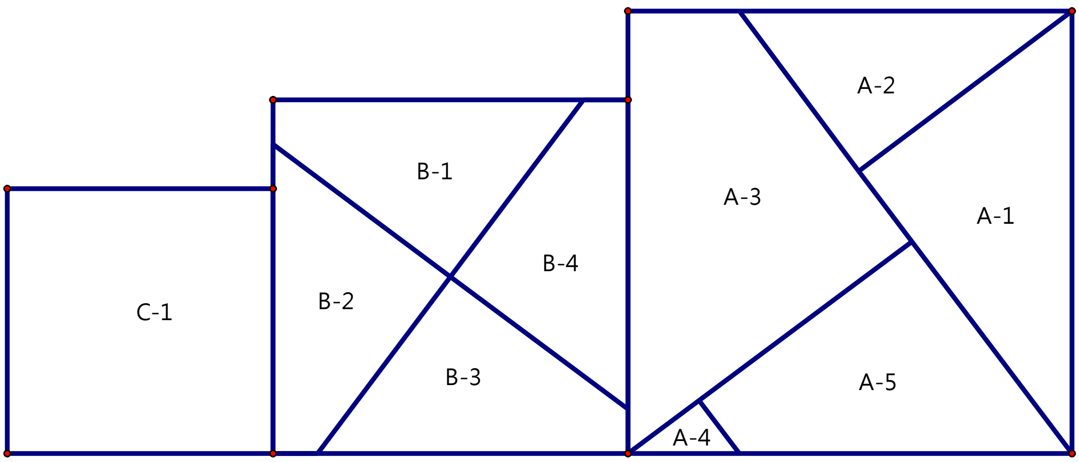
(3)$\overline{BD}$為△ABC 斜邊上的高，所以△ABC 面積＝(　　) × $\overline{AC}$ × $\overline{BD}$。

(4)試著利用(2)(3)的結果，算出 $\overline{BD}$的長。

《畢氏定理拼拼看》

將附件的兩個小正方形剪開成 B-1、B-2、B-3、B-4、C-1 五小塊，拼貼在$a^2$處。附件的大正方形剪開成 A-1、A-2、A-3、A-4、A-5 五小塊，拼貼在$b^2$與$c^2$處。



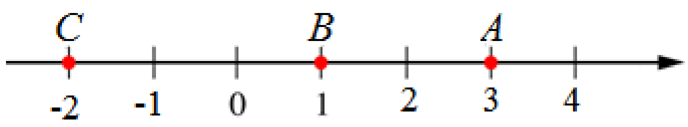



# 主題三　勾股定理的應用~~平面上兩點的距離

《溫故知新站》數線上兩點間的距離

如果 A($a$)、B($b$)是數線上的兩點，那麼 A 與 B 的距離我們會表示成：$\overline{AB}=|a-b|$ 或 $|b-a|$，即數線上兩點間的距離等於這**兩點坐標差的絕對值。**

如圖，A、B 與 C 為數線上的三點，坐標依序為3、1與−2，那麼

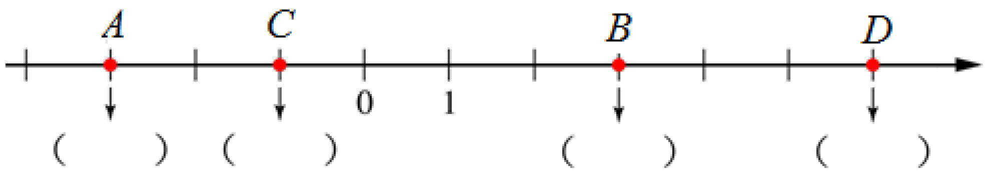



$\overline{AB}=|3-1|=2$（或$|1-3|=|-2|=2$）；

$\overline{AC}=|3-(-2)|=|3+2|=5$。

小試身手

(1)寫出 A、B、C 與 D 四點的坐標，再求$\overline{AB}$、$\overline{AC}$、$\overline{BC}$與$\overline{BD}$的值。




(2)求數線上 A（−16）、B（−2）與 C（5）中任意兩點的距離。

$\overline{AB}=$

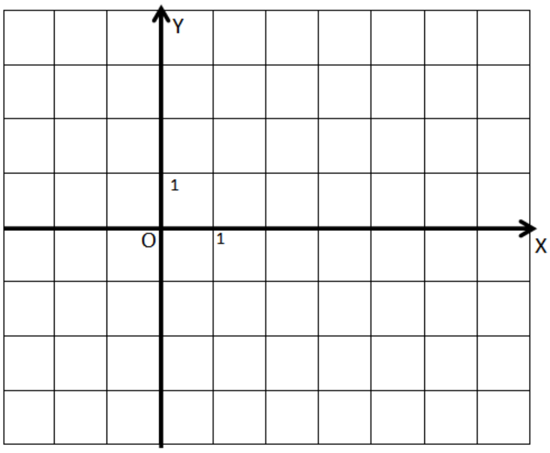
$\overline{BC}=$

$\overline{CA}=$

《問題討論站》

$\boxed{\text{問題一}}$求坐標平面上，在相同水平線（或鉛垂線）上的兩點距離。

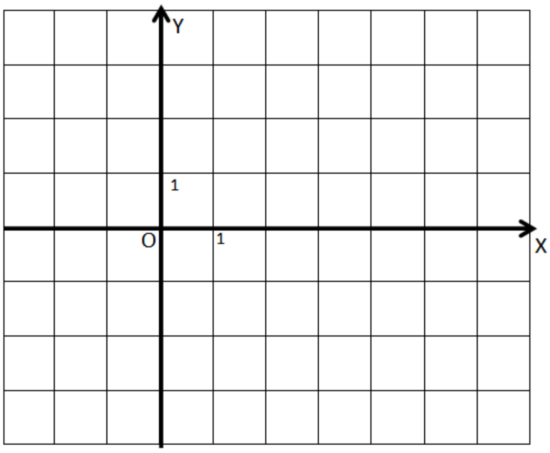
1. 坐標平面上有A(2 , 0)、B(5 , 0)、C(0 , 3)、D(0 , －2)，
請試著回答下列問題：
(1)標出A、B、C、D的位置




(2)從點A、B、C、D中，找出在 $x$軸上的兩點，列式算出它們的距離。

(3)從點A、B、C、D中，找出在y軸上的兩點，列式算出它們的距離。

2. 如圖，E(2，－3)、F(5，－3)、G(－2 , 3)、H(－2 , －2)，
請試著回答下列問題：
(1)標出E、F、G、H的位置




(2) 從點E、F、G、H中，找出在相同水平線上的兩點，列式算出它們的距離。

(3) 從點E、F、G、H中，找出在相同鉛垂線上的兩個點，列式算出它們的距離。

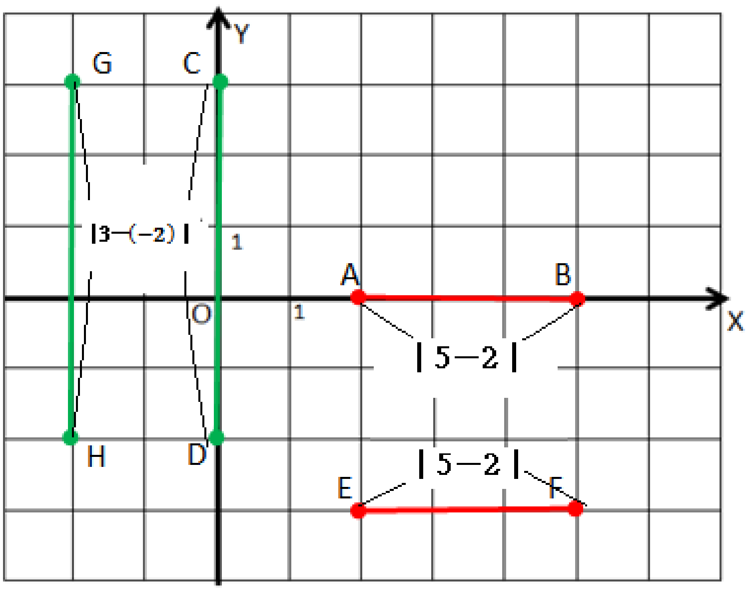
在上圖中，我們發現：

(1) 在相同水平線的兩點，其距離等於它們 $x$ 坐標差的絕對值。

$\overline{AB}=|5-2|=3$，$\overline{EF}=|5-2|=3$。

(2) 在相同鉛垂線的兩點，其距離等於它們 $y$ 坐標差的絕對值。

$\overline{CD}=|3-(-2)|=5$，$\overline{GH}=|3-(-2)|=5$。




## 小試身手

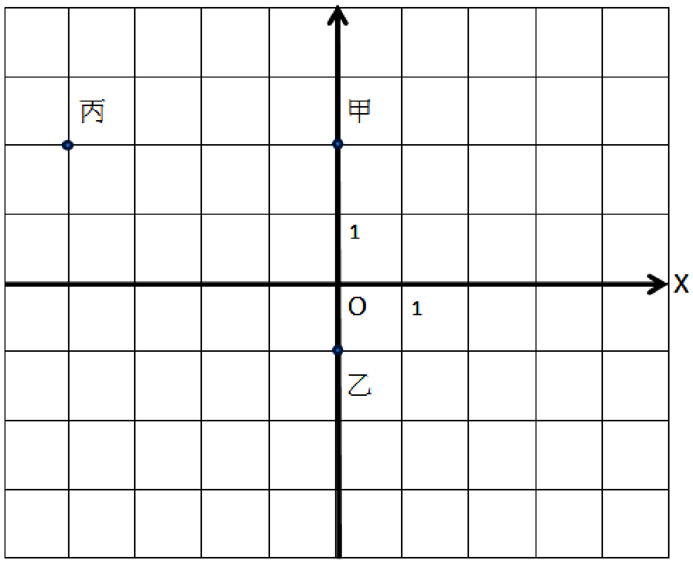
坐標平面上的 $P(-1,2)$、$Q(-1,-5)$、$R(4, 2)$三點中，

（1）哪兩點在同一水平線上？它們的距離是多少？

（2）哪兩點在同一鉛垂線上？它們的距離是多少？

$\boxed{\text{問題二}}$坐標平面上，不在相同水平線（或鉛垂線）上的兩點距離。

1. 坐標平面上，甲(0 , 2)、乙(0 , -1)、丙(-4 , 2)，試著回答下列問題：




(1) 以甲、乙、丙三點為頂點，可連成哪種三角形？答：

(2) 求甲、乙兩點的距離。解：

(3) 求甲、丙兩點的距離。解：

(4) 利用(2)、(3)的數據，求乙、丙兩點的距離。解：

(5) 哪兩點不在相同水平線上，也不在相同鉛垂線上？

(6) 請試著利用勾股定理填填看：

$$(\text{乙、丙的距離})^2=(\underline{\qquad\quad}\text{的距離})^2+(\underline{\qquad\quad}\text{的距離})^2$$

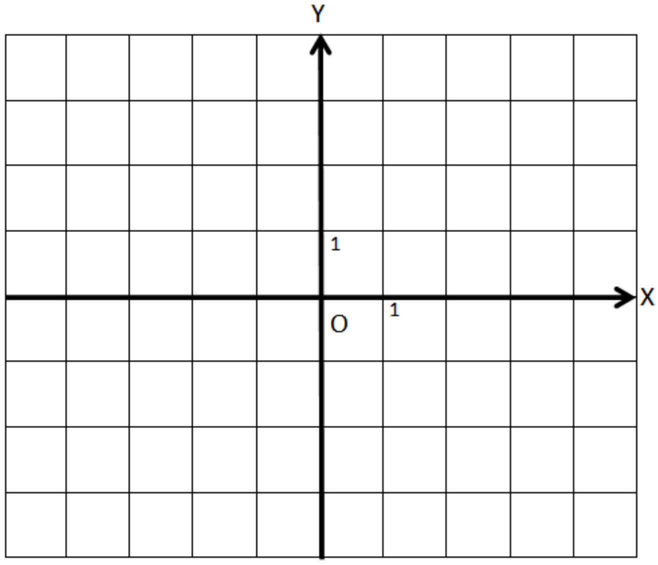
$$(\text{乙、丙的距離})=\sqrt{(\underline{\qquad\quad}\text{的距離})^2+(\underline{\qquad\quad}\text{的距離})^2}$$

恭喜你算對甲、丙兩點的距離，這可是一大突破！

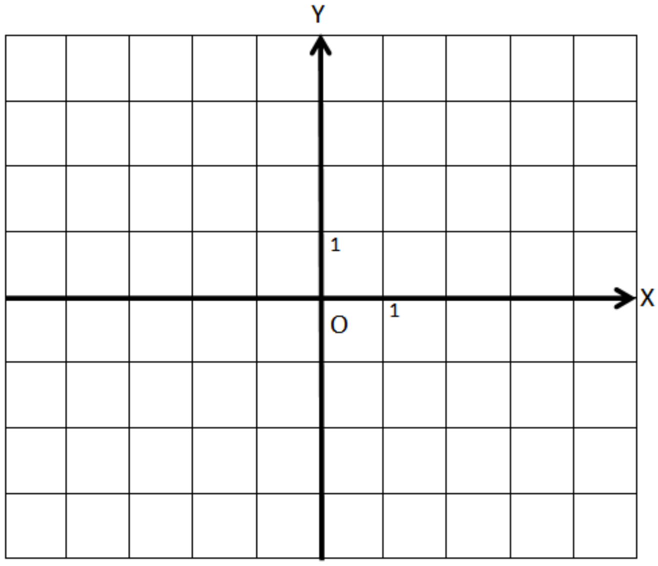
2.坐標平面上，O(0 , 0)、B(3 , 4)、C(-3 , -1)、D(0 , 2)，

請試著回答下列問題：

(1) 標出 O、B 的位置，並連$\overline{OB}$，接著設法找出適當的水平線與鉛垂線，畫出一個以$\overline{OB}$為斜邊的直角三角形，進而算出$\overline{OB}$。




(2) 同第(1)題，標出 C、D 的位置，並連$\overline{CD}$，畫出一個以$\overline{CD}$為斜邊的直角三角形，進而算出$\overline{CD}$。




(3)你對下列的敘述有何看法呢？答：

坐標平面上，對於不在同一水平線上和同一鉛垂線上的 A、B 兩點，我們可以利用畫出**水平線與鉛垂線**，找到一個以$\overline{AB}$為斜邊的直角三角形，就可以用我們學過的**勾股定理**，來求出 A、B 兩點間的距離。

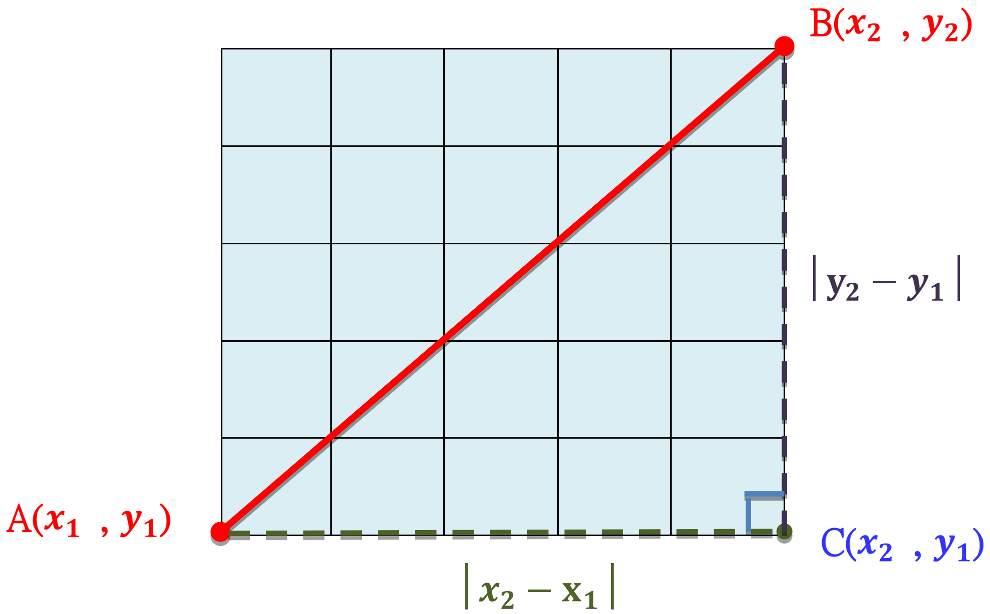
《兩點距離公式大現身》

坐標平面上的 $A(x_1\ ,y_1)$、$B(x_2\ ,y_2)$ 兩點，若不在同一水平線與鉛垂線上，我們可找出 $C(x_2\ ,y_1)$ 點，使得△ABC 為一直角三角形。

且 $\overline{AC}=|x_2-x_1|$，$\overline{BC}=|y_2-y_1|$，由**勾股定理**得知：

$$\overline{AB}=\sqrt{\overline{AC}^2+\overline{BC}^2}$$

$$=\sqrt{|x_2-x_1|^2+|y_2-y_1|^2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$




如果 $A(x_1\ ,y_1)$、$B(x_2\ ,y_2)$是直角坐標平面上的兩點，

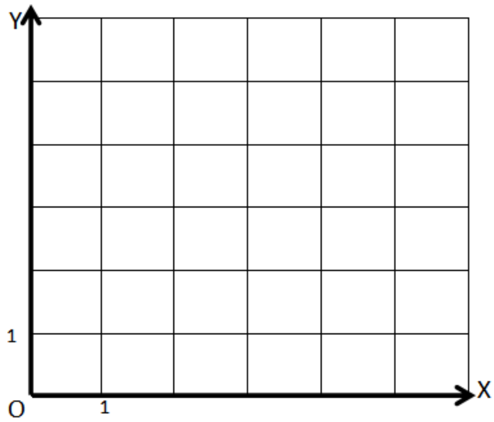
則 A 與 B 的距離 $\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$。

《動手玩遊戲》

1. 請拿出 1 顆骰子，投擲 4 次，把出現的點數分別記錄在表格裡：

| 第 1 次 | 第 2 次 | 第 3 次 | 第 4 次 |
| --- | --- | --- | --- |
| | | | |

2. 現在我們把「第一次投擲的點數」令為$x_1$，「第二次投擲的點數」令為$y_1$，「第三次投擲的點數」令為$x_2$，「第四次投擲的點數」令為$y_2$。在坐標平面上畫出 A($x_1$ , $y_1$)、B($x_2$ , $y_2$)兩點。
3. 試著算出$\overline{AB}$的值




《計算補給站》

如何計算坐標平面上 A(－1,－2)、B(3, －5)兩點的距離？

列式：$\overline{AB}=\sqrt{[(-1)-3]^2+[(-2)-(-5)]^2}$

化簡：$\overline{AB}=\sqrt{(-1-3)^2+(-2+5)^2}$

$=\sqrt{(-4)^2+3^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$

**小試身手**

1. 坐標平面上有 A(－1,. 2)、B(7, －4)兩點，試求 A、B 兩點的距離。

解：$\overline{AB}=\sqrt{[(-1)-(\quad)]^2+[(\quad)-(\quad)]^2}$

$\overline{AB}=$

2. 坐標平面上有 P(7,. －2)、Q(3, －1)兩點，求$\overline{PQ}$的值。

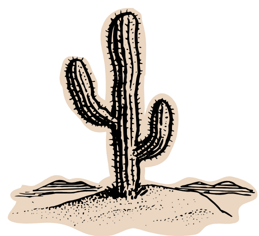
## 加強練習

1. 直角坐標平面上有 A(5 , 2)、B(2 , 4)、C(－4 , 2)、D(1 , －2)，

 (1) 求出 A、B 兩點的距離

 (2) 求出 C、D 兩點的距離

2. 坐標平面上 A(－1,6)、B(－1, －8) 、C(10, 6)三點，求△ABC 的三邊長。



## 《何處是綠洲》

坐標平面上的一個沙漠區有 A(0,11) 、B(-6,3)、C(5,-1)三點。已知綠洲是其中一點，達多與巴索兩兄弟各自分據了另外的兩個定點。若達多、巴索兩人與綠洲的距離皆為整數，且達多與綠洲的距離比巴索與綠洲的距離遠。那麼綠洲及達多、巴索分別位於何處？