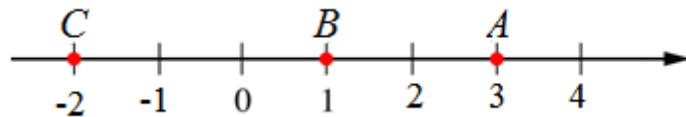


主題三 勾股定理的應用~平面上兩點的距離

《溫故知新站》數線上兩點間的距離

如果 $A(a)$ 、 $B(b)$ 是數線上的兩點，那麼 A 與 B 的距離我們會表示成： $\overline{AB} = |a - b|$ 或 $|b - a|$ ，即數線上兩點間的距離等於這兩點坐標差的絕對值。

如圖， A 、 B 與 C 為數線上的三點，坐標依序為 3、1 與 -2，那麼

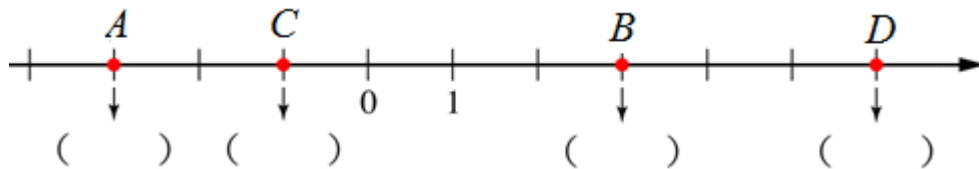


$$\overline{AB} = |3 - 1| = 2 \quad (\text{或} |1 - 3| = |-2| = 2) ;$$

$$\overline{AC} = |3 - (-2)| = |3 + 2| = 5 .$$

小試身手

(1) 寫出 A 、 B 、 C 與 D 四點的坐標，再求 \overline{AB} 、 \overline{AC} 、 \overline{BC} 與 \overline{BD} 的值。



(2) 求數線上 $A(-16)$ 、 $B(-2)$ 與 $C(5)$ 中任意兩點的距離。

$$\overline{AB} =$$

$$\overline{BC} =$$

$$\overline{CA} =$$

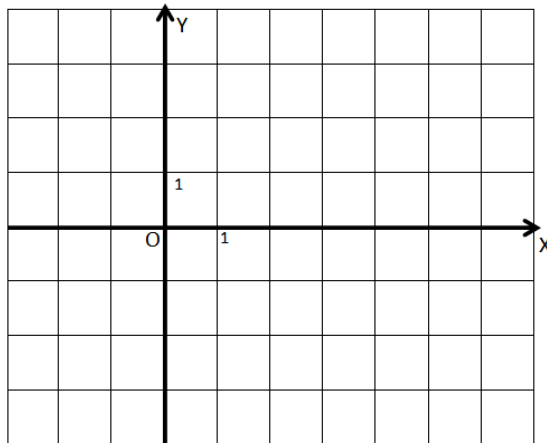
《問題討論站》

問題一 求坐標平面上，在相同水平線（或鉛垂線）上的兩點距離。

1. 坐標平面上有 $A(2, 0)$ 、 $B(5, 0)$ 、 $C(0, 3)$ 、 $D(0, -2)$ ，

請試著回答下列問題：

(1) 標出 A 、 B 、 C 、 D 的位置



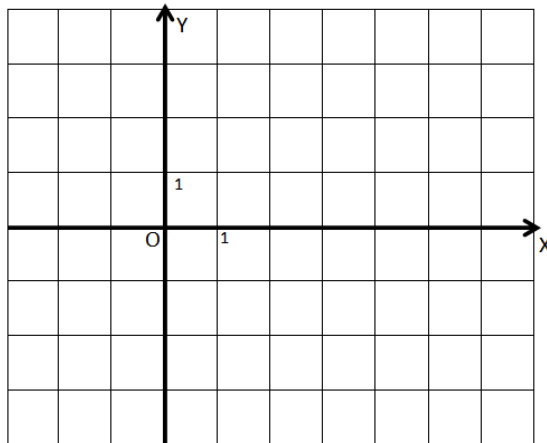
(2) 從點 A 、 B 、 C 、 D 中，找出在 x 軸上的兩點，列式算出它們的距離。

(3) 從點 A 、 B 、 C 、 D 中，找出在 y 軸上的兩點，列式算出它們的距離。

2. 如圖， $E(2, -3)$ 、 $F(5, -3)$ 、 $G(-2, 3)$ 、 $H(-2, -2)$ ，

請試著回答下列問題：

(1) 標出 E 、 F 、 G 、 H 的位置



(2) 從點 E 、 F 、 G 、 H 中，找出在相同水平線上的兩點，列式算出它們的距離。

(3) 從點 E 、 F 、 G 、 H 中，找出在相同鉛垂線上的兩個點，列式算出它們的距離。

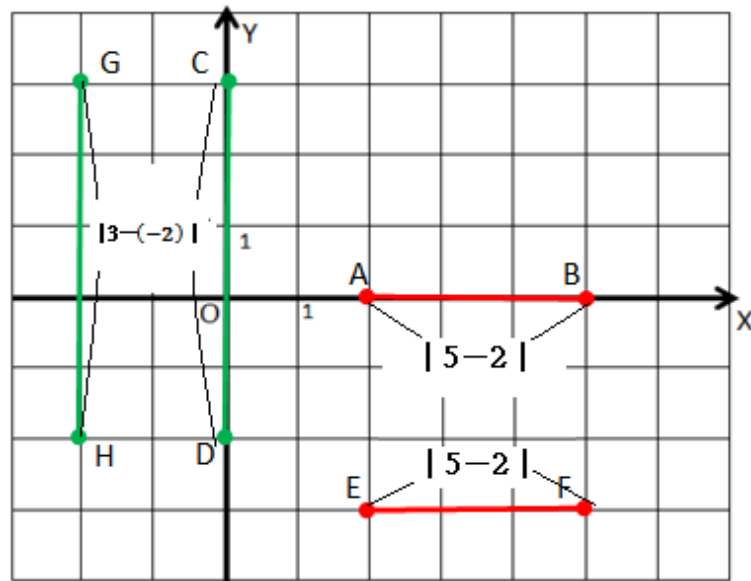
在上圖中，我們發現：

- (1) 在相同水平線的兩點，其距離等於它們 x 坐標差的絕對值。

$$\overline{AB} = |5 - 2| = 3, \overline{EF} = |5 - 2| = 3。$$

- (2) 在相同鉛垂線的兩點，其距離等於它們 y 坐標差的絕對值。

$$\overline{CD} = |3 - (-2)| = 5, \overline{GH} = |3 - (-2)| = 5。$$



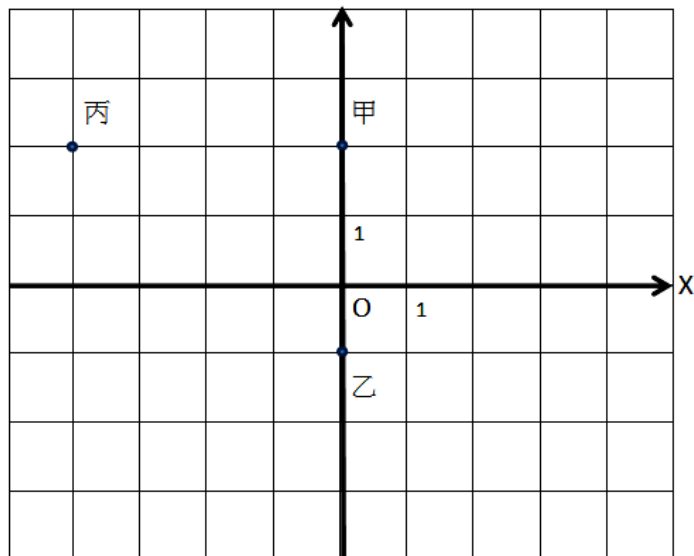
小試身手

坐標平面上的 $P(-1, 2)$ 、 $Q(-1, -5)$ 、 $R(4, 2)$ 三點中，

- (1) 哪兩點在同一水平線上？它們的距離是多少？
- (2) 哪兩點在同一鉛垂線上？它們的距離是多少？

問題二 坐標平面上，不在相同水平線（或鉛垂線）上的兩點距離。

1. 坐標平面上，甲(0, 2)、乙(0, -1)、丙(-4, 2)，試著回答下列問題：



- (1) 以甲、乙、丙三點為頂點，可連成哪種三角形？答：
- (2) 求甲、乙兩點的距離。解：
- (3) 求甲、丙兩點的距離。解：
- (4) 利用(2)、(3)的數據，求乙、丙兩點的距離。解：
- (5) 哪兩點不在相同水平線上，也不在相同鉛垂線上？
- (6) 請試著利用勾股定理填填看：

$$(\text{乙、丙的距離})^2 = (\underline{\hspace{2cm}} \text{的距離})^2 + (\underline{\hspace{2cm}} \text{的距離})^2$$

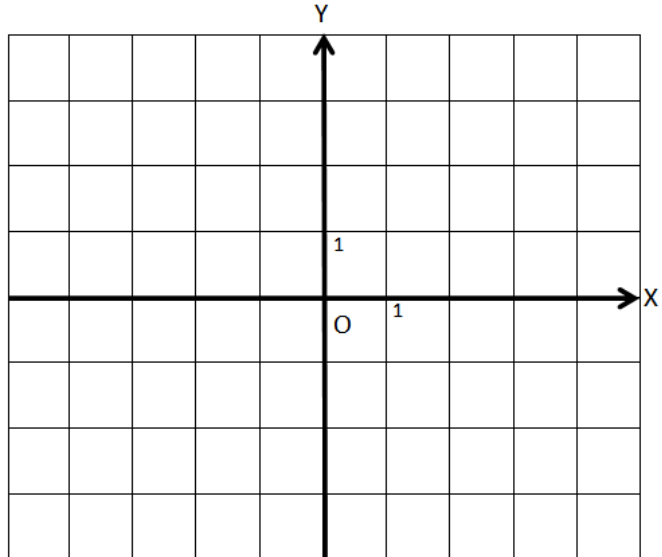
$$(\text{乙、丙的距離}) = \sqrt{(\underline{\hspace{2cm}} \text{的距離})^2 + (\underline{\hspace{2cm}} \text{的距離})^2}$$

恭喜你算對甲、丙兩點的距離，這可是一大突破！

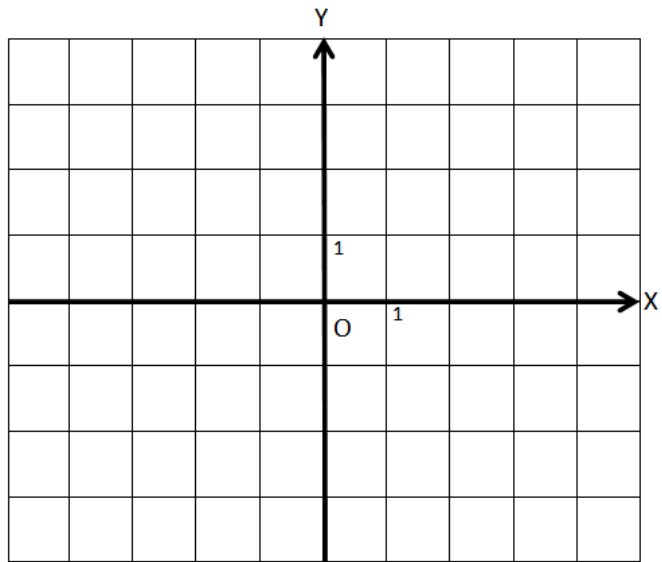
2.坐標平面上， $O(0, 0)$ 、 $B(3, 4)$ 、 $C(-3, -1)$ 、 $D(0, 2)$ ，

請試著回答下列問題：

- (1)標出 O 、 B 的位置，並連 \overline{OB} ，接著設法找出適當的水平線與鉛垂線，畫出一個以 \overline{OB} 為斜邊的直角三角形，進而算出 \overline{OB} 。



- (2)同第(1)題，標出 C 、 D 的位置，並連 \overline{CD} ，畫出一個以 \overline{CD} 為斜邊的直角三角形的直角三角形，進而算出 \overline{CD} 。



(3)你對下列的敘述有何看法呢？答：

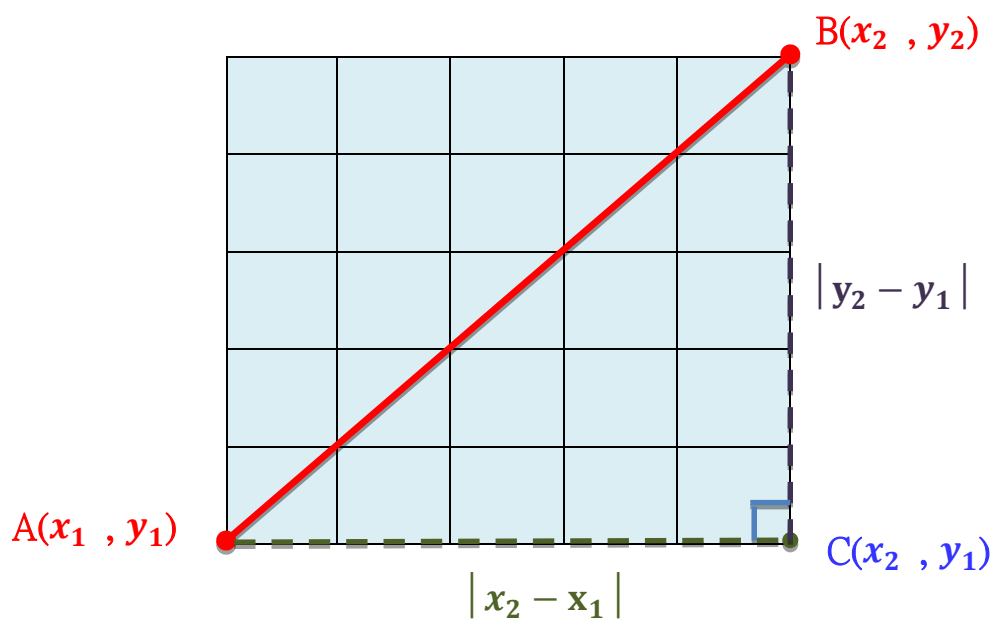
坐標平面上，對於不在同一水平線上和同一鉛垂線上的 A 、 B 兩點，我們可以利用畫出**水平線**與**鉛垂線**，找到一個以 \overline{AB} 為斜邊的直角三角形，就可以用我們學過的**勾股定理**，來求出 A 、 B 兩點間的距離。

《兩點距離公式大現身》

坐標平面上的 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 兩點，若不在同一水平線與鉛垂線上，我們可找出 $C(x_2, y_1)$ 點，使得 $\triangle ABC$ 為一直角三角形。

且 $\overline{AC} = |x_2 - x_1|$ ， $\overline{BC} = |y_2 - y_1|$ ，由勾股定理得知：

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2} \\ &= \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\end{aligned}$$



如果 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 是直角坐標平面上的兩點，

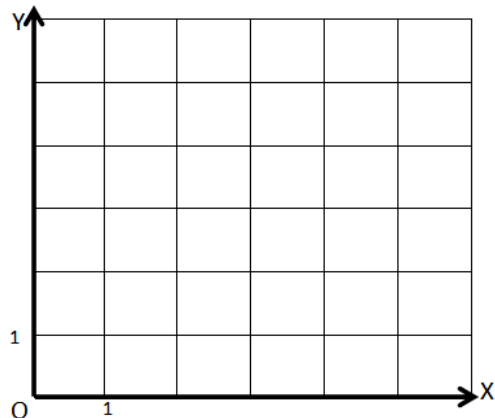
則 A 與 B 的距離 $\overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ 。

《動手玩遊戲》

1. 請拿出 1 顆骰子，投擲 4 次，把出現的點數分別記錄在表格裡：

第 1 次	第 2 次	第 3 次	第 4 次

2. 現在我們把「第一次投擲的點數」令為 x_1 ，「第二次投擲的點數」令為 y_1 ，「第三次投擲的點數」令為 x_2 ，「第四次投擲的點數」令為 y_2 。在坐標平面上畫出 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 兩點。
3. 試著算出 \overline{AB} 的值



《計算補給站》

如何計算坐標平面上 $A(-1, -2)$ 、 $B(3, -5)$ 兩點的距離？

$$\text{列式： } \overline{AB} = \sqrt{[(-1) - 3]^2 + [(-2) - (-5)]^2}$$

$$\text{化簡： } \overline{AB} = \sqrt{(-1 - 3)^2 + (-2 + 5)^2}$$

$$= \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

小試身手

1. 坐標平面上有 $A(-1, 2)$ 、 $B(7, -4)$ 兩點，試求 A 、 B 兩點的距離。

$$\text{解： } \overline{AB} = \sqrt{[(-1) - (\quad)]^2 + [(\quad) - (\quad)]^2}$$

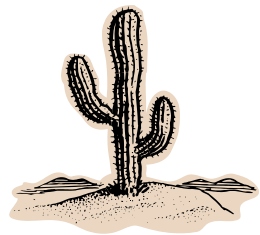
$$\overline{AB} =$$

2. 坐標平面上有 $P(7, -2)$ 、 $Q(3, -1)$ 兩點，求 \overline{PQ} 的值。

加強練習

- 直角坐標平面上有 $A(5, 2)$ 、 $B(2, 4)$ 、 $C(-4, 2)$ 、 $D(1, -2)$ ，
 - 求出 A 、 B 兩點的距離
 - 求出 C 、 D 兩點的距離
- 坐標平面上 $A(-1, 6)$ 、 $B(-1, -8)$ 、 $C(10, 6)$ 三點，求 $\triangle ABC$ 的三邊長。

《何處是綠洲》



坐標平面上的一個沙漠區有 $A(0, 11)$ 、 $B(-6, 3)$ 、 $C(5, -1)$ 三點。已知綠洲是其中一點，達多與巴索兩兄弟各自分據了另外的兩個定點。若達多、巴索兩人與綠洲的距離皆為整數，且達多與綠洲的距離比巴索與綠洲的距離遠。那麼綠洲及達多、巴索分別位於何處？