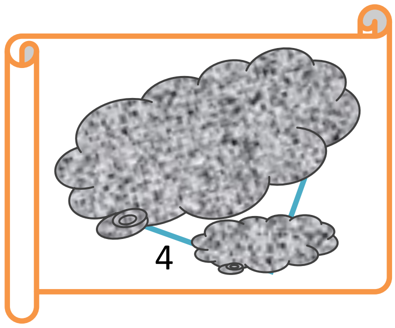
單元四　勾股定理與兩點距離

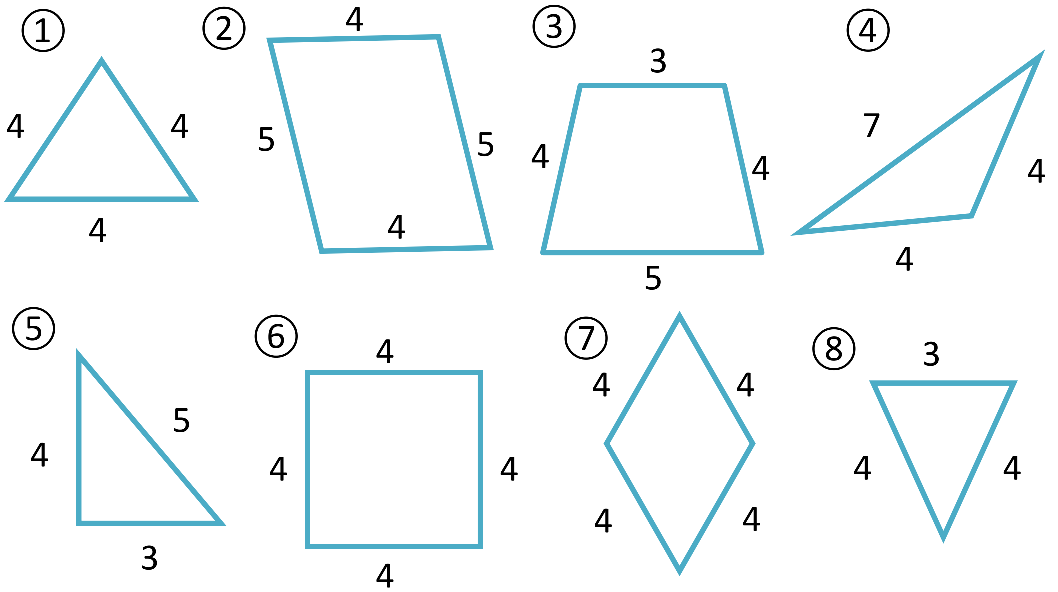
主題一　勾股定理

相傳很久很久以前，在古老的希臘時代，有個叫畢達哥拉斯的人，他手中有一份藏寶圖但需要解開其中的謎題才能找到最後的寶藏，讓我們來一起幫忙他吧！

謎題一

藏寶圖上重要的線索被汙點遮住了，請試著從下列的碎片中找出能符合藏寶圖上線索的碎片:





謎題二、發現藏寶圖下面還有一些文字:

此碎片的全部邊長分別填入□內可滿足此等式：

$$\square^2 = \square^2 + \square^2$$

你所找出的是_____號碎片，形狀是________形。

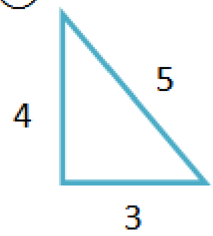
你所填入的數是：$\square^2 = \square^2 + \square^2$

你找對了嗎？答：____________。

《解謎時間》

符合藏寶圖上線索的碎片就是 5 號：邊長 3、4、5 的直角三角形。

⑤



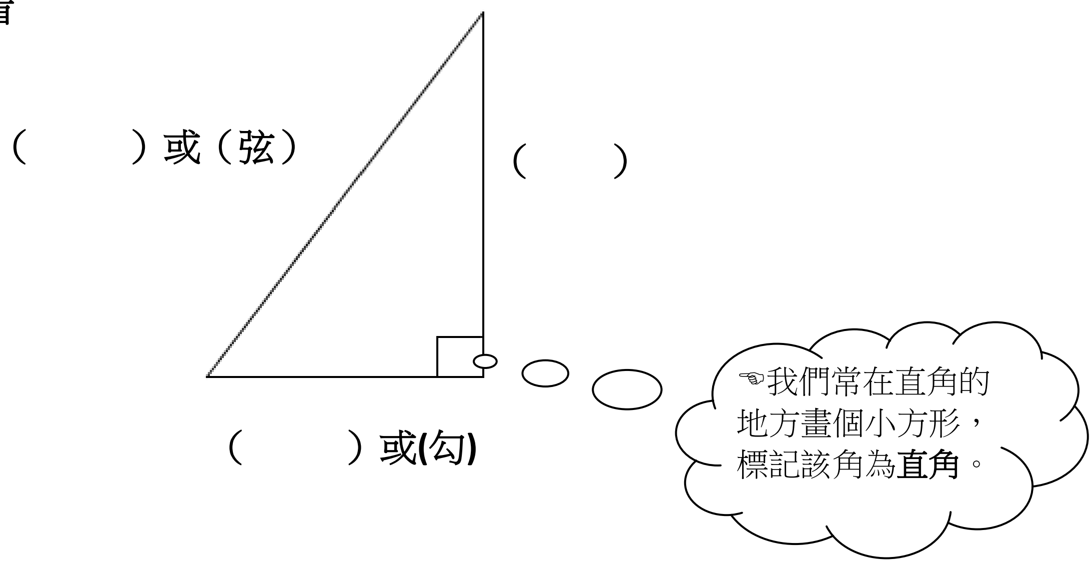
$\boxed{5}^2 = \boxed{3}^2 + \boxed{4}^2$ 或 $\boxed{5}^2 = \boxed{4}^2 + \boxed{3}^2$

其實，任何一個直角三角形的三邊長都可滿足$\boxed{\text{謎題二}}$中的等式。

《名詞補給站》

有一個內角為**直角**的三角形稱為**直角三角形**。其中直角所對的邊稱為**斜邊**（也稱**弦**），另外的兩邊稱為**股**，又較短的股也稱為**勾**。

填填看



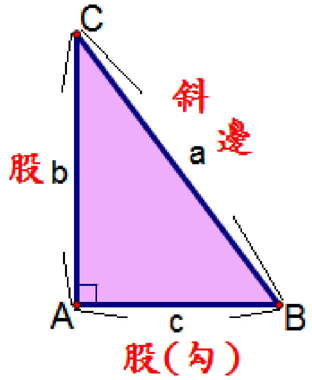
《畢氏定理大現身》

直角三角形的三邊邊長具有一個特質，就是

直角三角形斜邊長的平方等於兩股長的平方和，

稱為**畢氏定理**，又稱**勾股定理**或**商高定理**。即

斜邊^2＝股^2＋勾^{2}或 **斜邊＝$\sqrt{\text{股}^2+\text{勾}^2}$**。



填填看

1. 右上圖的直角三角形△ABC 中，∠A＝______°，$\overline{BC}$為_____邊，

   其餘兩邊______與______稱為股，三邊關係為 a^2＝___＋___。

2. 下列四組數中有兩組符合畢氏定理的等式，請找出來填入方格。

   (1) 2，3，4　(2) 6，8，10　(3) 5、12、13　(4) 7，10，14

$$\square^2=\square^2+\square^2\;,\quad \square^2=\square^2+\square^2$$

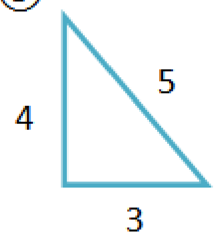
《解謎時間》

謎題二的條件就是畢氏定理的等式，只要形狀是直角三角形的就可以符合。計算如下：

斜邊平方＝$5^2=25$，

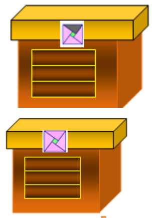
兩股平方和＝$3^2+4^2=9+16=25$

⑤



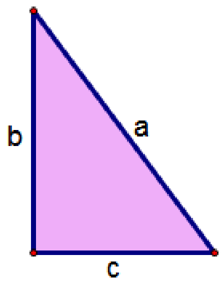
《藏寶圖的秘密》

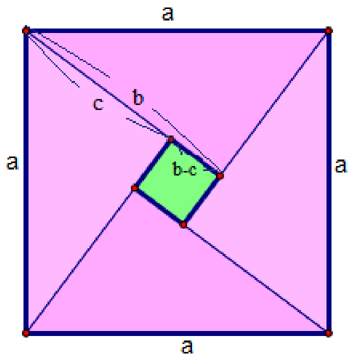
終於找到了符合藏寶圖上的碎片，把碎片放到了寶箱上，正好補上一個與該碎片完全一樣的缺角，補上去後，順利地打開寶箱。裡面有著一封信，信上寫著:



看到此信，表示你我是有緣之人，相信你一定對剛剛的等式與圖片有所困惑，先讓我告訴你一個秘密吧！

仔細觀察底下的兩個圖形，右邊的正方形是由 4 個左邊的直角三角形所拼成的，且中間有一個小正方形的空隙。





不難發現:**大正方形面積＝四個直角三角形面積＋小正方形面積**

$$a^2=4(\frac{1}{2}bc)+(b-c)^2$$

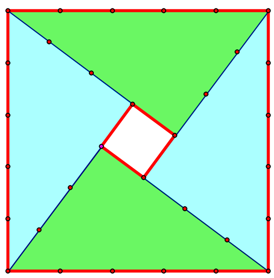
$$a^2=(2bc)+(b^2-2bc+c^2)$$

整理完你會得到 $\mathbf{a^2=b^2+c^2}$

這個祕密被你發現了，其實這是個**知識的藏寶箱**！

填填看

右圖是由 4 個邊長是 3、4、5 的直角三角形所拼成的正方形。



大正方形面積＝_____×_____＝_____，

四個直角三角形面積＝4×($\frac{1}{2}$×_____×_____)＝_____，

小正方形面積＝_____×_____＝_____，

以上數據符合信封上所寫的關係嗎？答：_____。

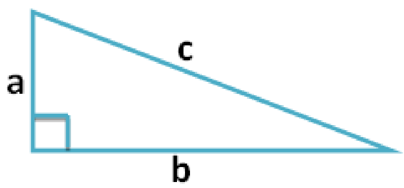
小試身手

1. 如圖，a、b、c 分別為直角三角形的三邊長，則下列關係何者正確？

(A)　b=$\sqrt{a^2+c^2}$

(B)　a=$\sqrt{b^2+c^2}$

(C)　c=$\sqrt{a^2+b^2}$



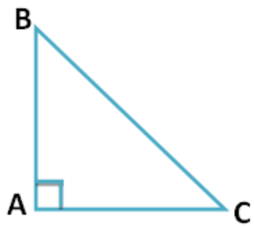
2. 如圖，下列哪個關係式是正確的？

(A) $\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2$

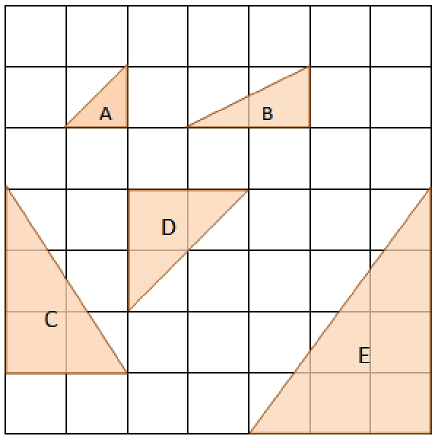
(B) $\overline{AB}^2=\overline{AC}^2-\overline{BC}^2$

(C) $\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2$

(D) $\overline{BC}^2=\overline{AB}^2-\overline{AC}^2$



3. 圖中每個小方格邊長都是 1。



因三角形 A 的兩股長為 1、1，
利用畢氏定理得
A 的斜邊＝$\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$。

請試著算出其他三角形的斜邊長。

B 的斜邊＝$\sqrt{(\quad)^2+(\quad)^2}$＝$\sqrt{(\quad)+(\quad)}=\sqrt{(\quad)}$

C 的斜邊＝

D 的斜邊＝

E 的斜邊＝