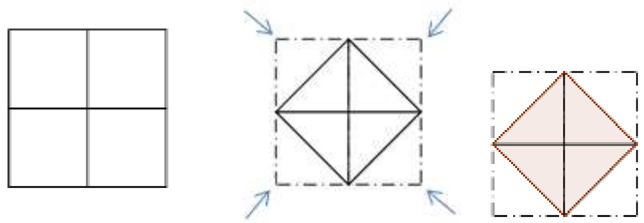
單元三　平方根

主題一:新符號出現”$\sqrt{\ }$”

一、探索活動

請拿出附件那張邊長為 2 的正方形色紙(如圖一)，再請你將這個正方形的四角折向中心點(如圖二)，摺好的正方形如圖三，讓我們來看看這個新的正方形有什麼有趣之處吧!



圖(一)　　圖(二)　　圖(三)

問題一：算算看摺出來新的正方形的面積。

(提示:邊長兩公分的正方形扣掉外面四個等腰直角三角形)

問題二：用你的尺量一下摺出來新的正方形的邊長到底有多長(越精細越好)。

問題三：請同學們用上面量出來的邊長算出摺出來新的正方形面積。

問題四：明明是同一個正方形，為什麼用不同的算法會造成面積的差異?到底哪個面積是對的?為什麼?

問題五：怎麼表示這種面積為 2 的正方形的邊長?

老師想說的話：以前遇到面積為 4 的正方形，我們可以很快的反應出邊長就是 2，但是由以上活動我們發現，在生活中可以找到面積為 2 的正方形，但是邊長卻很難表示成確切值，所以新符號的發展就開始被需要了。

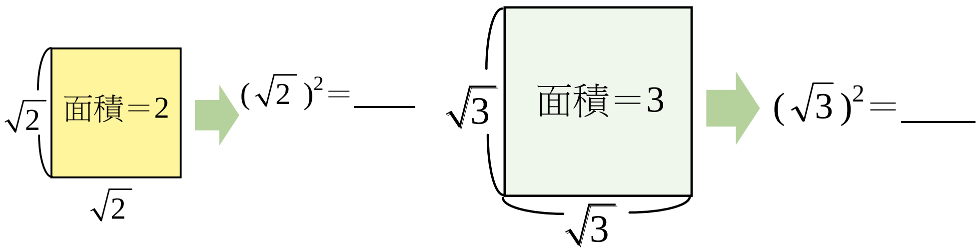
二、認識根號

從摺紙的活動中，我們發現暫時無法用之前學過的數來表示面積為 2 的正方形的邊長，我們可以先假設邊長為 x，接下來我們可以用式子表示，即 $x^2=2$，而我們就用新的符號” $\sqrt{2}$ ” (唸為”根號 2 ”)來表示面積為 2 的正方形的邊長，也就是說面積為 2 的正方形，邊長可表示為 $\sqrt{2}$，同樣地，面積為 3 的正方形，邊長可表示為 $\sqrt{3}$。

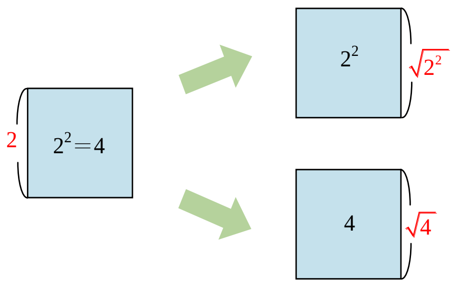
以後當我們知道正方形的面積之後，要表示它的邊長就不難了，如果一個正方形的面積是 a，那麼它的邊長就是 $\sqrt{a}$，唸為”根號 a ”。

練習 1:

1.請完成以下的空格



2.請填滿以下空格



面積是 4 的正方形，邊長可以寫成_______，也可以寫成_______

所以：$\sqrt{4}=\sqrt{(\quad)^2}=$ ______

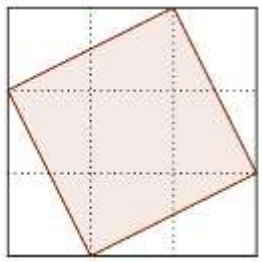
3. (1)面積為 5 的正方形邊長為多少?

(2)面積為 16 的正方形邊長為多少?

4. (1)邊長為$\sqrt{5}$的正方形，其面積為多少?

(2)邊長為$\sqrt{21}$的正方形，其邊長為多少?

5.右圖中每個小正方形的邊長皆為 1,請問灰色正方形的面積為何?邊長為多少?(提示: 灰色正方形的面積=大正方形的面積-四個三角形的面積)



三、根號比較大小

動動腦 1：右圖有兩個不同大小的正方形，請問邊長較長的正方形面積會比較大還是比較小？為什麼？

動動腦 2：面積較大的正方形，邊長會較長還是較短？

> **概念一點通:**
>
> 之前我們說過$\sqrt{正方形面積}=\sqrt{(正方形邊長)^2}=正方形邊長$，假設比較大的正方形面積是$a$，比較小的正方形面積是$b$，那麼由邊長的大小關係就可以得到$\sqrt{a}>\sqrt{b}$。

練習 2:

1. (1)比較$\sqrt{14}$、$\sqrt{17}$、$\sqrt{15}$的大小關係

   (2)比較$\sqrt{23}$、$\sqrt{19}$、$\sqrt{25}$的大小關係

2.試比較$\sqrt{37}$、$\sqrt{42}$、$\sqrt{36}$的大小關係

主題二:平方根的意義

一、平方根的意義

以前我們學過平方的概念，例如:我們說3的平方是9，用式子我們可以表示為$3^2=9$;又例如:$-\frac{1}{3}$的平方是$\frac{1}{9}$，表示為$(-\frac{1}{3})^2=\frac{1}{9}$，若$b^2=a$，以前我們常常說$a$是$b$的平方，現在我們反過來敘述，我們說$b$是$a$的**平方根**(即$b$自己乘自己會等於$a$)。

以上面的例子來說，由於

$3^2=9$，我們就說 3 是 9 的(正)平方根

$(-\frac{1}{3})^2=\frac{1}{9}$，我們就說$-\frac{1}{3}$是$\frac{1}{9}$的(負)平方根。

動動腦：你認識的數之中，除了 3 乘 3 等於 9 之外，還有沒有其他數自己乘自己會等於 9?

概念一點通：**每個正數的平方根都會有兩個**，一個是正的我們稱為**正平方根**，另一個是負的，我們稱為**負平方根**。

動動腦：0 的平方根是什麼呢?(也就是哪個數字自己乘自己是 0?)

重點提示:0 的平方根就是 0

練習 1:

1. 25 的平方根為___________(提示:有兩個)

2. $\frac{1}{4}$ 的平方根為___________

3. (1) 12 的正平方根為___________
   (2) 7 的負平方根為___________

4. (1) 試求所有滿足 $a^2=8$ 的 a。(共有兩個)
   (2) 試求所有滿足 $k^2=13$ 的 k。(共有兩個)

5. (1) 17 的平方根為___________
   (2) 24 的平方根為___________

6.試求(1) $\sqrt{64}$ (2) $-\sqrt{81}$

7.試求(1) $\sqrt{0.01}$ (2) $-\sqrt{0.25}$

動動腦：你能找出 -4 的平方根嗎?為什麼?

重點提示:負數沒有平方根

想想看,我們知道一個不是 0 的數平方之後都會是正數,所以 $\sqrt{(-3)^2}=\sqrt{3^2}=3$ 是可以被我們接受的，這時我們發覺根號開出來的一定是正的，所以我們可以推斷:

$$\boxed{\sqrt{a^2}=|a|}$$

二、利用乘方開方表估算根號的大小

有時候我們會好奇一個具有根號的數到底有多大，那個時候我們就會去找它附近有什麼整數然後再去估量它的大小。例如今天我們想要知道有$\sqrt{137}$多大，那我們可能會想到$\sqrt{137}$比$\sqrt{121}$大一些，$\sqrt{137}$又比$\sqrt{144}$小一些，所以我們可以說$\sqrt{121}<\sqrt{137}<\sqrt{144}$，即$11<\sqrt{137}<12$，用這個方法我們就知道$\sqrt{137}$大概是 11 又多一點，但是問題來了，怎麼會想到$\sqrt{121}$和$\sqrt{144}$這兩個剛好根號開出來是整數的數拿來比較呢?所以我們常常會善用下面的表格來幫助我們。

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
N^2	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
N	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
N^2	121	144	169	196	225	256	289	324	361	400

有了這個表格我們就輕鬆多了，例如有人問你$\sqrt{300}$有多大，那你便可以用表格找到$289<300<324$，所以$\sqrt{289}<\sqrt{300}<\sqrt{324}$，即$17<\sqrt{300}<18$，最後得到$\sqrt{300}$是比 17 大一點點的數。

練習 2:

請利用上頁表格回答問題

(1)$\sqrt{50}$介於哪兩個整數之間?

(2)$\sqrt{120}$介於哪兩個整數之間?

(3)$-\sqrt{32}$介於哪兩個整數之間?

主題三:根式的運算

前面介紹了含有根號的數，沒錯，雖然它們長得很陌生，不過它們都是一個數字喔!那麼它們之間是怎麼運算的呢?讓我們來看一看。

這時我們要先想想我們在學多項式的時候，3 乘以 x 我們可以寫成 $3x$，那麼 3 乘以根號 2 呢?沒錯!$3\times\sqrt{2}$ 我們就記成 $3\sqrt{2}$，那麼 $\frac{3}{5}$ 倍的 $\sqrt{2}$ 呢?
答對囉!$\frac{3}{5}\times\sqrt{2}$ 我們就記成 $\frac{3}{5}\sqrt{2}$。只要熟悉多項式的模式，相信你一定可以學得很好!讓我們練習看看吧!

練習 1:
運算下列各式:

1. $12\times\sqrt{6}$

2. $(-8)\times\sqrt{2}$

3. $(-1)\times3\sqrt{2}$

4. $(-\sqrt{8})\times11$

5. $\sqrt{7}\times\frac{3}{2}$

6. $(-\frac{3}{5}\sqrt{2})\times\frac{4}{9}$

一、根式的乘法運算規則

接下來跟大家介紹兩個平方根很重要的運算:

$$\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{a\times b}(a\geq 0,b\geq 0)$$

說明例: $(\sqrt{3}\times\sqrt{5})^2=(\sqrt{3}\times\sqrt{5})(\sqrt{3}\times\sqrt{5})=(\sqrt{3}\times\sqrt{3})(\sqrt{5}\times\sqrt{5})=3\times 5=15$

所以 $\sqrt{3}\times\sqrt{5}$ 是 15 的正平方根，而 15 的正平方根為 $\sqrt{15}$，我們可以得到 $\sqrt{3}\times\sqrt{5}=\sqrt{15}=\sqrt{3\times 5}$ 。

練習 2:

請計算下列式子

1. $\sqrt{2}\times\sqrt{7}$

2. $\sqrt{5}\times\sqrt{11}$

3. $2\sqrt{3}\times(-\sqrt{2})$

4. $\frac{4}{3}\sqrt{5}\times\sqrt{6}$

別忘了可以將 $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{a\times b}$ 這個等式反過來看，即 $\sqrt{a\times b}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$ ，這可以幫助我們把根號之內的數字化小，

例如: $\sqrt{27}=\sqrt{3\times 9}=\sqrt{3}\times\sqrt{9}=\sqrt{3}\times 3=3\sqrt{3}$ ，

又例如: $\sqrt{20}=\sqrt{4\times 5}=\sqrt{2^2\times 5}=\sqrt{2^2}\times\sqrt{5}=2\times\sqrt{5}=2\sqrt{5}$ ，聰明的你有沒有發現，這樣做真的讓我們的式子變簡單了，這種被化簡的式子我們稱為最簡根式。

最簡根式: 若正整數 a 可以分解成 $a=b^2\times c$ ，其中 b 與 c 為正整數；而且 c 沒有大於 1 的平方數的因數，則 $\sqrt{a}=\sqrt{b^2\times c}=\sqrt{b^2}\times\sqrt{c}=b\sqrt{c}$ 。

我們將 $\sqrt{a}$ 化成 $b\sqrt{c}$ 的過程稱為**根式的化簡**。而 $b\sqrt{c}$ 就稱為**最簡根式**。

範例一:試將$\sqrt{18}$化為最簡根式

解:$\sqrt{18}=\sqrt{2\times3^2}=\sqrt{2}\times\sqrt{3^2}=\sqrt{2}\times3=3\sqrt{2}$

範例二:試將$\sqrt{32}$化為最簡根式

解:$\sqrt{32}=\sqrt{2^5}=\sqrt{2^4\times2}=\sqrt{4^2\times2}=\sqrt{4^2}\times\sqrt{2}=4\sqrt{2}$

練習 3:

將下列根式化成最簡根式

1. $\sqrt{63}$

2. $\sqrt{8}$

3. $\sqrt{150}$

4. $\sqrt{6}\times\sqrt{21}$

5. $\sqrt{8^2\times7}$

二、根式的除法運算規則

如果今天有兩個根號相除會怎麼樣呢?讓我們看看另一個根式的重要運算法則:

$$\sqrt{a}\div\sqrt{b}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}=\sqrt{a\div b}(a\geq 0,b>0)$$

說明例: $(\sqrt{3}\div\sqrt{5})^2=(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}})^2=\frac{(\sqrt{3})^2}{(\sqrt{5})^2}=\frac{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{3}{5}$

所以 $\sqrt{3}\div\sqrt{5}$ 是 $\frac{3}{5}$ 的正平方根，而 $\frac{3}{5}$ 的正平方根為 $\sqrt{\frac{3}{5}}$，我們得到

$\sqrt{3}\div\sqrt{5}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}=\sqrt{\frac{3}{5}}=\sqrt{3\div 5}$ 。

練習 4:

計算下列根式

1. $\sqrt{18}\div\sqrt{2}$

2. $\sqrt{15}\div\sqrt{3}$

3. $\sqrt{10}\div\sqrt{\frac{2}{7}}$

4. $\sqrt{\frac{4}{3}}\div\sqrt{\frac{2}{9}}$

三、利用通分將分母的根號消去

習慣上，我們不喜歡分母的位置有根號出現，怎麼辦呢?可以將分子分母同乘以原本在分母的那個數，例如: $\sqrt{5}\div\sqrt{2}=\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{5}\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

那麼分母的根號就會不見了!

> **概念一點通**:當 a 、 b 是正整數時， $\sqrt{\dfrac{b}{a}}$ ，這類的式子我們會將它表示成 $\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$ ，再將分子分母同乘 $\sqrt{a}$ ，即將 $\sqrt{\dfrac{b}{a}}$ 轉換成 $\dfrac{\sqrt{ab}}{a}$ 。

練習 5:

化簡下列根式

1. $\sqrt{21}\div\sqrt{3}$

2. $2\sqrt{6}\div\sqrt{18}$

3. $\sqrt{10}\div\sqrt{\dfrac{3}{2}}$

4. $\dfrac{1}{\sqrt{15}}$

5. $(-\sqrt{18})\times\sqrt{\dfrac{1}{21}}$

四、同類方根的合併

在學會兩個根號相除之後，那如果兩個根號要加減運算的話要怎麼做呢?，還記得在學多項式的時候有同類項合併的概念嗎?如果你還記得的話那就恭喜你囉!這裡的想法一模一樣。

範例 1: $2\sqrt{3}+5\sqrt{3}$ 可以看成 2 個 $\sqrt{3}$ 加上 5 個 $\sqrt{3}$，所以總共有 7 個 $\sqrt{3}$。故 $2\sqrt{3}+5\sqrt{3}=7\sqrt{3}=(2+5)\sqrt{3}$。

範例 2: $2\sqrt{5}-4\sqrt{5}$ 可以看成 2 個 $\sqrt{5}$ 減掉 4 個 $\sqrt{5}$，
故 $2\sqrt{5}-4\sqrt{5}=(2-4)\sqrt{5}=-2\sqrt{5}$。

範例 3: $\frac{1}{3}\sqrt{7}+\frac{1}{2}\sqrt{7}$ 可以看成 $\frac{1}{3}$ 個 $\sqrt{7}$ 加上 $\frac{1}{2}$ 個 $\sqrt{7}$，
故 $\frac{1}{3}\sqrt{7}+\frac{1}{2}\sqrt{7}=(\frac{1}{3}+\frac{1}{2})\sqrt{7}=\frac{5}{6}\sqrt{7}$。

概念一點通:若 $a>0$，$m\sqrt{a}\pm n\sqrt{a}=(m\pm n)\sqrt{a}$。

但是像 $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 因為根號裡面的數字不同，這樣的式子是沒有辦法化簡的，我們就不用額外處理。

練習 6:

1. $\frac{2}{3}\sqrt{7}-\frac{1}{6}\sqrt{7}$

2. $2\sqrt{21}+\frac{5}{6}\sqrt{21}$

3. $3\sqrt{5}+2\sqrt{3}-\sqrt{5}-4\sqrt{3}$

4. $\sqrt{2}-\sqrt{7}+\frac{3}{2}\sqrt{2}$

5. $(\sqrt{3}+2\sqrt{2})-(\sqrt{2}-\sqrt{3})$

6. $\sqrt{\frac{5}{2}}-\sqrt{10}$

7. $\sqrt{18}-\sqrt{72}+\sqrt{27}$

8. $\sqrt{\frac{5}{3}}-\sqrt{\frac{3}{5}}$

學會了一些根式的運算法則後，我們就可以處理一些更難的式子囉!

五、利用乘法公式運算根式

範例 1: $(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ 這種題目要怎麼解呢?還記得我們之前學過的乘法公式嗎?由 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ 我們可以知道

$(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3})=(\sqrt{2})^2+2\times\sqrt{2}\times\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2=5+2\sqrt{6}$ 。

範例 2: $(\sqrt{2}-\sqrt{7})(\sqrt{2}-\sqrt{7})$ 這種題目要怎麼解呢?

由 $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ 我們可以知道

$(\sqrt{2}-\sqrt{7})(\sqrt{2}-\sqrt{7})=(\sqrt{2})^2-2\times\sqrt{2}\times\sqrt{7}+(\sqrt{7})^2=9-2\sqrt{14}$ 。

範例 3: $(\sqrt{10}+\sqrt{7})(\sqrt{10}-\sqrt{7})$ 這種題目要怎麼解呢?

由 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ 我們可以知道

$(\sqrt{10}+\sqrt{7})(\sqrt{10}-\sqrt{7})=(\sqrt{10})^2-(\sqrt{7})^2=10-7=3$ 。

善用之前學過的乘法公式，可以幫助我們計算根式。

練習 7:

計算下列根式:

1. $(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+1)$

2. $(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})$

3. $(\sqrt{5}+\sqrt{7})(\sqrt{5}+\sqrt{7})$

4. $(\sqrt{18}-\sqrt{7})(\sqrt{18}-\sqrt{7})$

5. $(3\sqrt{5}+\sqrt{44})(3\sqrt{5}-\sqrt{44})$

6. $(8-\sqrt{6})(8-\sqrt{6})$

動動腦:上面的練習 7 第 2、5 小題答案都是漂亮的整數，你發現了什麼?

重點提示:若 a,b 都是正整數，則 $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=a-b$ 答案會是一個整數。

六、有理化

我們之前有提到我們不喜歡分母的不分出現根號，所以我們都會藉由通分的技巧來讓分母的根號消失，但是如果分母的根式更加複雜呢?例如$\frac{1}{\sqrt{2}-1}$，別擔心!這個時候我們可以利用乘法公式來幫助我們消除分母的根號喔!

範例 1: $\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\frac{1\times(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)\times(\sqrt{2}+1)}=\frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2})^2-(1)^2}=\frac{\sqrt{2}+1}{1}=\sqrt{2}+1$

範例 2:

$$\frac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}=\frac{2\times(\sqrt{3}+\sqrt{5})}{(\sqrt{3}-\sqrt{5})\times(\sqrt{3}+\sqrt{5})}=\frac{2\times(\sqrt{3}+\sqrt{5})}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{5})^2}=\frac{2\times(\sqrt{3}+\sqrt{5})}{-2}=-(\sqrt{3}+\sqrt{5})=-\sqrt{3}-\sqrt{5}$$

練習 8:

計算下列根式:

1. $\frac{2}{\sqrt{2}+1}$

2. $\frac{1}{\sqrt{3}-2}$

3. $\frac{1}{\sqrt{17}-4}$

4. $\frac{3}{\sqrt{27}-2}$