主題三:根式的運算

前面介紹了含有根號的數，沒錯，雖然它們長得很陌生，不過它們都是一個數字喔!那麼它們之間是怎麼運算的呢?讓我們來看一看。

這時我們要先想想我們在學多項式的時候，3 乘以 x 我們可以寫成 $3x$，那麼 3 乘以根號 2 呢?沒錯! $3\times\sqrt{2}$ 我們就記成 $3\sqrt{2}$，那麼 $\frac{3}{5}$ 倍的 $\sqrt{2}$ 呢?

答對囉! $\frac{3}{5}\times\sqrt{2}$ 我們就記成 $\frac{3}{5}\sqrt{2}$。只要熟悉多項式的模式，相信你一定可以學得很好!讓我們練習看看吧!

練習 1:

運算下列各式:

1. $12\times\sqrt{6}$

2. $(-8)\times\sqrt{2}$

3. $(-1)\times 3\sqrt{2}$

4. $(-\sqrt{8})\times 11$

5. $\sqrt{7}\times\frac{3}{2}$

6. $(-\frac{3}{5}\sqrt{2})\times\frac{4}{9}$

一、根式的乘法運算規則

接下來跟大家介紹兩個平方根很重要的運算:

$$\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{a\times b}(a\geq 0, b\geq 0)$$

說明例: $(\sqrt{3}\times\sqrt{5})^2=(\sqrt{3}\times\sqrt{5})(\sqrt{3}\times\sqrt{5})=(\sqrt{3}\times\sqrt{3})(\sqrt{5}\times\sqrt{5})=3\times 5=15$

所以$\sqrt{3}\times\sqrt{5}$是 15 的正平方根，而 15 的正平方根為$\sqrt{15}$，我們可以得到 $\sqrt{3}\times\sqrt{5}=\sqrt{15}=\sqrt{3\times 5}$ 。

練習 2:

請計算下列式子

1. $\sqrt{2}\times\sqrt{7}$

2. $\sqrt{5}\times\sqrt{11}$

3. $2\sqrt{3}\times(-\sqrt{2})$

4. $\frac{4}{3}\sqrt{5}\times\sqrt{6}$

別忘了可以將$\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{a\times b}$這個等式反過來看，即$\sqrt{a\times b}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$ ，這可以幫助我們把根號之內的數字化小，

例如: $\sqrt{27}=\sqrt{3\times 9}=\sqrt{3}\times\sqrt{9}=\sqrt{3}\times 3=3\sqrt{3}$ ，

又例如: $\sqrt{20}=\sqrt{4\times 5}=\sqrt{2^2\times 5}=\sqrt{2^2}\times\sqrt{5}=2\times\sqrt{5}=2\sqrt{5}$，聰明的你有沒有發現，這樣做真的讓我們的式子變簡單了，這種被化簡的式子我們稱為最簡根式。

最簡根式:若正整數a可以分解成$a=b^2\times c$ ，其中b與c為正整數；而且c沒有大於 1 的平方數的因數，則$\sqrt{a}=\sqrt{b^2\times c}=\sqrt{b^2}\times\sqrt{c}=b\sqrt{c}$ 。

我們將$\sqrt{a}$化成$b\sqrt{c}$的過程稱為**根式的化簡**。而$b\sqrt{c}$就稱為**最簡根式**。

範例一:試將 $\sqrt{18}$ 化為最簡根式

解: $\sqrt{18}=\sqrt{2\times 3^2}=\sqrt{2}\times\sqrt{3^2}=\sqrt{2}\times 3=3\sqrt{2}$

範例二:試將 $\sqrt{32}$ 化為最簡根式

解: $\sqrt{32}=\sqrt{2^5}=\sqrt{2^4\times 2}=\sqrt{4^2\times 2}=\sqrt{4^2}\times\sqrt{2}=4\sqrt{2}$

練習 3:

將下列根式化成最簡根式

1. $\sqrt{63}$

2. $\sqrt{8}$

3. $\sqrt{150}$

4. $\sqrt{6}\times\sqrt{21}$

5. $\sqrt{8^2\times 7}$

二、根式的除法運算規則

如果今天有兩個根號相除會怎麼樣呢?讓我們看看另一個根式的重要運算法則:

$$\sqrt{a} \div \sqrt{b} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{a \div b}(a \geq 0, b > 0)$$

說明例: $(\sqrt{3} \div \sqrt{5})^2 = (\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}})^2 = \frac{(\sqrt{3})^2}{(\sqrt{5})^2} = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{3}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{3}{5}$

所以 $\sqrt{3} \div \sqrt{5}$ 是 $\frac{3}{5}$ 的正平方根，而 $\frac{3}{5}$ 的正平方根為 $\sqrt{\frac{3}{5}}$，我們得到

$\sqrt{3} \div \sqrt{5} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{3}{5}} = \sqrt{3 \div 5}$ 。

練習 4:

計算下列根式

1. $\sqrt{18} \div \sqrt{2}$

2. $\sqrt{15} \div \sqrt{3}$

3. $\sqrt{10} \div \sqrt{\frac{2}{7}}$

4. $\sqrt{\frac{4}{3}} \div \sqrt{\frac{2}{9}}$

三、利用通分將分母的根號消去

習慣上，我們不喜歡分母的位置有根號出現，怎麼辦呢?可以將分子分母同乘以原本在分母的那個數，例如: $\sqrt{5} \div \sqrt{2} = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{5} \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$

那麼分母的根號就會不見了!

概念一點通:當 a 、 b 是正整數時，$\sqrt{\dfrac{b}{a}}$ ，這類的式子我們會將它表示成 $\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$ ，再將分子分母同乘 $\sqrt{a}$ ，即將 $\sqrt{\dfrac{b}{a}}$ 轉換成 $\dfrac{\sqrt{ab}}{a}$ 。

練習 5:

化簡下列根式

1. $\sqrt{21} \div \sqrt{3}$

2. $2\sqrt{6} \div \sqrt{18}$

3. $\sqrt{10} \div \sqrt{\dfrac{3}{2}}$

4. $\dfrac{1}{\sqrt{15}}$

5. $(-\sqrt{18}) \times \sqrt{\dfrac{1}{21}}$

四、同類方根的合併

在學會兩個根號相除之後，那如果兩個根號要加減運算的話要怎麼做呢?，還記得在學多項式的時候有同類項合併的概念嗎?如果你還記得的話那就恭喜你囉!這裡的想法一模一樣。

範例 1: $2\sqrt{3}+5\sqrt{3}$ 可以看成 2 個 $\sqrt{3}$ 加上 5 個 $\sqrt{3}$，所以總共有 7 個 $\sqrt{3}$。故 $2\sqrt{3}+5\sqrt{3}=7\sqrt{3}=(2+5)\sqrt{3}$。

範例 2: $2\sqrt{5}-4\sqrt{5}$ 可以看成 2 個 $\sqrt{5}$ 減掉 4 個 $\sqrt{5}$，
故 $2\sqrt{5}-4\sqrt{5}=(2-4)\sqrt{5}=-2\sqrt{5}$。

範例 3: $\frac{1}{3}\sqrt{7}+\frac{1}{2}\sqrt{7}$ 可以看成 $\frac{1}{3}$ 個 $\sqrt{7}$ 加上 $\frac{1}{2}$ 個 $\sqrt{7}$，
故 $\frac{1}{3}\sqrt{7}+\frac{1}{2}\sqrt{7}=(\frac{1}{3}+\frac{1}{2})\sqrt{7}=\frac{5}{6}\sqrt{7}$。

概念一點通:若 $a>0$， $m\sqrt{a}\pm n\sqrt{a}=(m\pm n)\sqrt{a}$。

但是像 $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 因為根號裡面的數字不同，這樣的式子是沒有辦法化簡的，我們就不用額外處理。

練習 6:

1. $\frac{2}{3}\sqrt{7}-\frac{1}{6}\sqrt{7}$

2. $2\sqrt{21}+\frac{5}{6}\sqrt{21}$

3. $3\sqrt{5}+2\sqrt{3}-\sqrt{5}-4\sqrt{3}$

4. $\sqrt{2}-\sqrt{7}+\frac{3}{2}\sqrt{2}$

5. $(\sqrt{3}+2\sqrt{2})-(\sqrt{2}-\sqrt{3})$

6. $\sqrt{\frac{5}{2}}-\sqrt{10}$

7. $\sqrt{18}-\sqrt{72}+\sqrt{27}$

8. $\sqrt{\frac{5}{3}}-\sqrt{\frac{3}{5}}$

學會了一些根式的運算法則後，我們就可以處理一些更難的式子囉!

五、利用乘法公式運算根式

範例 1: $(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ 這種題目要怎麼解呢?還記得我們之前學過的乘法公式嗎?由 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ 我們可以知道

$(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3})=(\sqrt{2})^2+2\times\sqrt{2}\times\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2=5+2\sqrt{6}$ 。

範例 2: $(\sqrt{2}-\sqrt{7})(\sqrt{2}-\sqrt{7})$ 這種題目要怎麼解呢?

由 $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ 我們可以知道

$(\sqrt{2}-\sqrt{7})(\sqrt{2}-\sqrt{7})=(\sqrt{2})^2-2\times\sqrt{2}\times\sqrt{7}+(\sqrt{7})^2=9-2\sqrt{14}$ 。

範例 3: $(\sqrt{10}+\sqrt{7})(\sqrt{10}-\sqrt{7})$ 這種題目要怎麼解呢?

由 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ 我們可以知道

$(\sqrt{10}+\sqrt{7})(\sqrt{10}-\sqrt{7})=(\sqrt{10})^2-(\sqrt{7})^2=10-7=3$ 。

善用之前學過的乘法公式，可以幫助我們計算根式。

練習 7:

計算下列根式:

1. $(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+1)$

2. $(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})$

3. $(\sqrt{5}+\sqrt{7})(\sqrt{5}+\sqrt{7})$

4. $(\sqrt{18}-\sqrt{7})(\sqrt{18}-\sqrt{7})$

5. $(3\sqrt{5}+\sqrt{44})(3\sqrt{5}-\sqrt{44})$

6. $(8-\sqrt{6})(8-\sqrt{6})$

動動腦:上面的練習 7 第 2、5 小題答案都是漂亮的整數，你發現了什麼?

重點提示:若a,b都是正整數，則$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=a-b$答案會是一個整數。

六、有理化

我們之前有提到我們不喜歡分母的不分出現根號，所以我們都會藉由通分的技巧來讓分母的根號消失，但是如果分母的根式更加複雜呢?例如$\frac{1}{\sqrt{2}-1}$，別擔心!這個時候我們可以利用乘法公式來幫助我們消除分母的根號喔!

範例 1: $\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\frac{1\times(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)\times(\sqrt{2}+1)}=\frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2})^2-(1)^2}=\frac{\sqrt{2}+1}{1}=\sqrt{2}+1$

範例 2:

$$\frac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}=\frac{2\times(\sqrt{3}+\sqrt{5})}{(\sqrt{3}-\sqrt{5})\times(\sqrt{3}+\sqrt{5})}=\frac{2\times(\sqrt{3}+\sqrt{5})}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{5})^2}=\frac{2\times(\sqrt{3}+\sqrt{5})}{-2}=-(\sqrt{3}+\sqrt{5})=-\sqrt{3}-\sqrt{5}$$

練習 8:

計算下列根式:

1. $\frac{2}{\sqrt{2}+1}$

2. $\frac{1}{\sqrt{3}-2}$

3. $\frac{1}{\sqrt{17}-4}$

4. $\frac{3}{\sqrt{27}-2}$