

主題五 神算 x 有幾個解(根)

有些一元二次方程式的兩個解相同，就叫做重根，所以一元二次方程式的解又叫做它的根啊！



是啊！
我發現有時候 x 有 2 個答案，有時候重根，有時候又無解！難道我真的要每一題都算出來才能知道有幾個解嗎？

NO!NO!NO!如果只是想知道解的情形，大可不必把整個答案算出來，觀察一下前一主題【小試身手】的答案，填完下面的表格，你就會知道啦！



抄答案，誰不會！

一元二次方程式及其解	$b^2 - 4ac$ 的正負	有幾個根
(1) $x^2 - 6x + 9 = 0$ 解：	<input type="checkbox"/> $b^2 - 4ac > 0$ <input type="checkbox"/> $b^2 - 4ac = 0$ <input type="checkbox"/> $b^2 - 4ac < 0$	<input type="checkbox"/> 有兩相異根 <input type="checkbox"/> 有兩相同根(重根) <input type="checkbox"/> 無解
(2) $x^2 + 5x + 3 = 0$ 解：	<input type="checkbox"/> $b^2 - 4ac > 0$ <input type="checkbox"/> $b^2 - 4ac = 0$ <input type="checkbox"/> $b^2 - 4ac < 0$	<input type="checkbox"/> 有兩相異根 <input type="checkbox"/> 有兩相同根(重根) <input type="checkbox"/> 無解
(3) $x^2 - 5x + 4 = 0$ 解：	<input type="checkbox"/> $b^2 - 4ac > 0$ <input type="checkbox"/> $b^2 - 4ac = 0$ <input type="checkbox"/> $b^2 - 4ac < 0$	<input type="checkbox"/> 有兩相異根 <input type="checkbox"/> 重根 <input type="checkbox"/> 無解
(4) $2x^2 - 6x + 1 = 0$ 解：	<input type="checkbox"/> $b^2 - 4ac > 0$ <input type="checkbox"/> $b^2 - 4ac = 0$ <input type="checkbox"/> $b^2 - 4ac < 0$	<input type="checkbox"/> 有兩相異根 <input type="checkbox"/> 有兩相同根(重根) <input type="checkbox"/> 無解
(5) $4x^2 - 2x - 1 = 0$ 解：	<input type="checkbox"/> $b^2 - 4ac > 0$ <input type="checkbox"/> $b^2 - 4ac = 0$ <input type="checkbox"/> $b^2 - 4ac < 0$	<input type="checkbox"/> 有兩相異根 <input type="checkbox"/> 有兩相同根(重根) <input type="checkbox"/> 無解

<p>(6) $-2x^2 - x - 1 = 0$</p> <p>解：</p>	<p><input type="checkbox"/> $b^2 - 4ac > 0$</p> <p><input type="checkbox"/> $b^2 - 4ac = 0$</p> <p><input type="checkbox"/> $b^2 - 4ac < 0$</p>	<p><input type="checkbox"/> 有兩相異根</p> <p><input type="checkbox"/> 有兩相同根(重根)</p> <p><input type="checkbox"/> 無解</p>
<p>(7) $5x^2 - x - 1 = 0$</p> <p>解：</p>	<p><input type="checkbox"/> $b^2 - 4ac > 0$</p> <p><input type="checkbox"/> $b^2 - 4ac = 0$</p> <p><input type="checkbox"/> $b^2 - 4ac < 0$</p>	<p><input type="checkbox"/> 有兩相異根</p> <p><input type="checkbox"/> 有兩相同根(重根)</p> <p><input type="checkbox"/> 無解</p>
<p>(8) $x^2 + 9x = -9$</p> <p>解：</p>	<p><input type="checkbox"/> $b^2 - 4ac > 0$</p> <p><input type="checkbox"/> $b^2 - 4ac = 0$</p> <p><input type="checkbox"/> $b^2 - 4ac < 0$</p>	<p><input type="checkbox"/> 有兩相異根</p> <p><input type="checkbox"/> 有兩相同根(重根)</p> <p><input type="checkbox"/> 無解</p>

觀察上面的表格，你發現了嗎？

一元二次方程式有幾個根和 $b^2 - 4ac$ 的正負有很大的關係。

習慣上我們會把有幾個根稱做一元二次方程式解(根)的性質。

因為從 $b^2 - 4ac$ 的正負就可以判別根的性質，所以 $b^2 - 4ac$ 稱為一元二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ 的判別式。

整理如下：

判別式	解(根)的性質
$b^2 - 4ac > 0$	兩相異根
$b^2 - 4ac = 0$	兩相同根(重根)
$b^2 - 4ac < 0$	無解

例：利用 $b^2 - 4ac$ 判斷下列各一元二次方程式解的性質。

(1) $2x^2 - 3x - 2 = 0$

解：(1) $a = 2, b = -3, c = -2$

$$(2) \quad b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)$$

$$= 9 - (-16)$$

$$= 25 > 0$$

(3) 因為 $b^2 - 4ac > 0$ ，所以 x 有兩相異根。

不用把 x 算出來，只要算出 $b^2 - 4ac$ ，就知道有兩相異根耶，酷吧！



$$(2) 3x^2 - 8x + 4 = 0$$

解：(1) $a = 3, b = -1, c = 4$

$$(2) b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4$$

$$= 1 - 48$$

$$= -47 < 0$$

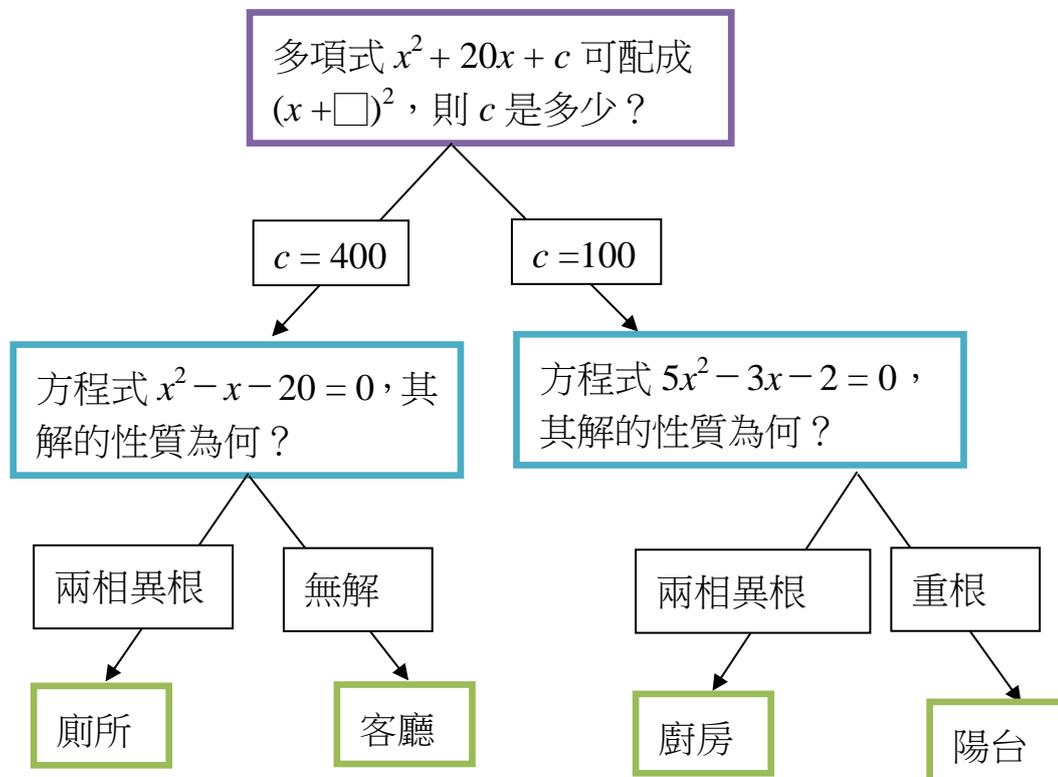
(3) 因為 $b^2 - 4ac < 0$ ，所以 x 無解

【牛刀小試】

(1) 連連看，請將左式的一元二次方程式和右邊解的性質選項做適當的配對。

一元二次方程式	解的性質
(1) $3x^2 - x + 4 = 0$ •	•有兩相異根
(2) $4x^2 + 6x - 3 = 0$ •	
(3) $-x^2 + 7x + 10 = 0$ •	•有兩相同根
(4) $9x^2 - 6x + 1 = 0$ •	
(5) $5x^2 - 8x - 2 = 0$ •	•無解
(6) $x^2 - 8x + 16 = 0$ •	

(2) 大家偷偷在某個地方留了一件小禮物給小光，慶祝他搬新家，並留了一個線索提示，只要按照對的敘述走，就可以到達指定的房間，請你幫忙小光找出禮物。



哈哈，我倒要看看你和你的幫手能不能找到我們精心尋覓的藏禮物地點！！



雕蟲小技怎麼可能難得倒我們？
禮物藏在_____啦！
下次藏在難度高一點的地方啦！！

附錄

x^2				x	x	x	x
x^2				x	x	x	x
1	1	1	1	1	1	1	
1	1	1	1	1	1	1	
1	1	1	1	1	1	1	
1	1	1	1	1	1	1	