

主題四 解 x 神奇法寶---公式解

說到解一元二次方程式，其實我還知道另一個方法，看在你教會我配方法的份上，我也教教你這個好方法！



◎用公式法解一元二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ 的步驟如下：

(一) 找出二次項係數 a ，一次項係數 b ，常數項 c 。

(二) 算出 $b^2 - 4ac$ 的值。

(三) 若 $b^2 - 4ac > 0$ ，則 $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ 。

若 $b^2 - 4ac = 0$ ，則 $x = \frac{-b}{2a}$ (重根)。

若 $b^2 - 4ac < 0$ ，則 x 無解。(在國中階段無解)

範例講解



例 1：解一元二次方程式 $3x^2 + 5x + 1 = 0$

解：

$$3x^2 + 5x + 1 = 0$$

$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ a & b & c \end{array}$

(1) $a = \underline{3}$ ， $b = \underline{5}$ ， $c = \underline{1}$

(2) $b^2 - 4ac = 25 - 4 \cdot 3 \cdot 1$
 $= 25 - 12$
 $= 13 > 0$

| | |
|-------------------------------------|-----------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> | $b^2 - 4ac > 0$ |
| <input type="checkbox"/> | $b^2 - 4ac = 0$ |
| <input type="checkbox"/> | $b^2 - 4ac < 0$ |

(3) $x = \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{2 \cdot 3}$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{6}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

例 2：解一元二次方程式 $4x^2 - 4x + 1 = 0$

解： $4x^2 - 4x + 1 = 0$

$\begin{matrix} \swarrow & & \searrow \\ a & & b & & c \end{matrix}$

(1) $a = 4, b = -4, c = 1$

(2) $b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1$
 $= 16 - 16$
 $= 0 = 0$

(3) $x = \frac{-(-4)}{2 \cdot 4}$ $x = \frac{-b}{2a}$
 $x = \frac{4}{8}$

| | |
|-------------------------------------|-----------------|
| <input type="checkbox"/> | $b^2 - 4ac > 0$ |
| <input checked="" type="checkbox"/> | $b^2 - 4ac = 0$ |
| <input type="checkbox"/> | $b^2 - 4ac < 0$ |

$x = \frac{1}{2}$ (重根)

小叮嚀：要注意係數
是否有負號喔！



例 3：解一元二次方程式 $-x^2 - 4x - 6 = 0$

解： $-1x^2 - 4x - 6 = 0$

$\begin{matrix} \swarrow & & \searrow \\ a & & b & & c \end{matrix}$

(1) $a = -1, b = -4, c = -6$

(2) $b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-6)$
 $= 16 - 24$
 $= -8 < 0$

(3) x 無解 x 無解

| | |
|-------------------------------------|-----------------|
| <input type="checkbox"/> | $b^2 - 4ac > 0$ |
| <input type="checkbox"/> | $b^2 - 4ac = 0$ |
| <input checked="" type="checkbox"/> | $b^2 - 4ac < 0$ |

動動手，動動腦，身體就會好！



練習



解下列各一元二次方程式：

1. $x^2 - 9x + 7 = 0$

解：(1) $a = \underline{\quad}$ ， $b = \underline{\quad}$ ， $c = \underline{\quad}$

(2) $b^2 - 4ac =$

(3) $x =$

| | |
|--------------------------|-----------------|
| <input type="checkbox"/> | $b^2 - 4ac > 0$ |
| <input type="checkbox"/> | $b^2 - 4ac = 0$ |
| <input type="checkbox"/> | $b^2 - 4ac < 0$ |

2. $-9x^2 + 6x - 1 = 0$

解：(1) $a = \underline{\quad}$ ， $b = \underline{\quad}$ ， $c = \underline{\quad}$

(2) $b^2 - 4ac =$

(3) $x =$

| | |
|--------------------------|-----------------|
| <input type="checkbox"/> | $b^2 - 4ac > 0$ |
| <input type="checkbox"/> | $b^2 - 4ac = 0$ |
| <input type="checkbox"/> | $b^2 - 4ac < 0$ |

3. $x^2 - 3x + 5 = 0$

解：(1) $a = \underline{\quad}$ ， $b = \underline{\quad}$ ， $c = \underline{\quad}$

(2) $b^2 - 4ac =$

(3) $x =$

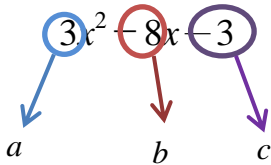
| | |
|--------------------------|-----------------|
| <input type="checkbox"/> | $b^2 - 4ac > 0$ |
| <input type="checkbox"/> | $b^2 - 4ac = 0$ |
| <input type="checkbox"/> | $b^2 - 4ac < 0$ |

範例講解



例 4：解一元二次方程式 $3x^2 - 8x - 3 = 0$

解： $3x^2 - 8x - 3 = 0$



(1) $a = \underline{3}$, $b = \underline{-8}$, $c = \underline{-3}$

(2) $b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-3)$
 $= 64 + 36$
 $= 100 > 0$

| | |
|---|-----------------|
| ■ | $b^2 - 4ac > 0$ |
| □ | $b^2 - 4ac = 0$ |
| □ | $b^2 - 4ac < 0$ |

(3) $x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{100}}{2 \cdot 3}$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$x = \frac{8 \pm 10}{6}$

$x = 3$ 或 $x = \frac{-1}{3}$

$\sqrt{100}$
 $= \sqrt{2^2 \cdot 5^2}$
 $= 2 \cdot 5$
 $= 10$

$x = \frac{8 \pm 10}{6}$ 可分開寫成：

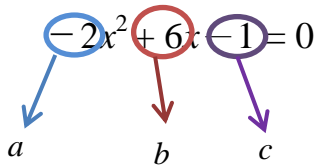
$x = \frac{8+10}{6}$ 或 $x = \frac{8-10}{6}$,

$x = \frac{18}{6}$ 或 $x = \frac{-2}{6}$,

$x = 3$ 或 $x = \frac{-1}{3}$

例 5：解一元二次方程式 $-2x^2 + 6x - 1 = 0$

解： $-2x^2 + 6x - 1 = 0$



(1) $a = \underline{-2}$, $b = \underline{6}$, $c = \underline{-1}$

(2) $b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-1)$
 $= 36 - 8$
 $= 28 > 0$

| | |
|---|-----------------|
| ■ | $b^2 - 4ac > 0$ |
| □ | $b^2 - 4ac = 0$ |
| □ | $b^2 - 4ac < 0$ |

(3) $x = \frac{-6 \pm \sqrt{28}}{2 \cdot (-2)}$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$x = \frac{-6 \pm 2\sqrt{7}}{-4}$

$\sqrt{28}$
 $= \sqrt{2^2 \cdot 7}$
 $= 2\sqrt{7}$

$x = \frac{3 \pm \sqrt{7}}{2}$

要約分時，可先把 $x = \frac{-6 \pm 2\sqrt{7}}{-4}$ 分開寫成：

$x = \frac{-6 + 2\sqrt{7}}{-4}$ 或 $x = \frac{-6 - 2\sqrt{7}}{-4}$ ，然後

$$\begin{array}{ccc} \parallel & & \parallel \\ \frac{-6}{-4} + \frac{2\sqrt{7}}{-4} & & \frac{-6}{-4} - \frac{2\sqrt{7}}{-4} \\ \parallel & & \parallel \\ \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2} & & \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2} \end{array}$$

再合併寫成 $x = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2}$ ，

或是寫成 $x = \frac{3 \pm \sqrt{7}}{2}$

練習



解下列各一元二次方程式：

1. $2x^2 + 7x - 4 = 0$

解：(1) $a = \underline{\quad}$ ， $b = \underline{\quad}$ ， $c = \underline{\quad}$

(2) $b^2 - 4ac =$

(3) $x =$

| | |
|--------------------------|-----------------|
| <input type="checkbox"/> | $b^2 - 4ac > 0$ |
| <input type="checkbox"/> | $b^2 - 4ac = 0$ |
| <input type="checkbox"/> | $b^2 - 4ac < 0$ |

2. $2x^2 - 4x - 5 = 0$

解：(1) $a = \underline{\quad}$ ， $b = \underline{\quad}$ ， $c = \underline{\quad}$

(2) $b^2 - 4ac =$

(3) $x =$

| | |
|--------------------------|-----------------|
| <input type="checkbox"/> | $b^2 - 4ac > 0$ |
| <input type="checkbox"/> | $b^2 - 4ac = 0$ |
| <input type="checkbox"/> | $b^2 - 4ac < 0$ |

請仿照上面的方法，解下列各一元二次方程式。

【小試身手】

(1) $x^2 - 6x + 9 = 0$

(2) $x^2 + 5x + 3 = 0$

(3) $x^2 - 5x + 4 = 0$

(4) $2x^2 - 6x + 1 = 0$

(5) $4x^2 - 2x - 1 = 0$

(6) $-2x^2 - x - 1 = 0$

(7) $5x^2 - x - 1 = 0$

(8) $x^2 + 9x = -9$



$x^2 + 9x = -9$ 的 a 、 b 、 c 是多少啊？

要先把 $x^2 + 9x = -9$ 寫成
 $x^2 + 9x + 9 = 0$ 再來判斷喔！！

