

## 主題五 平方差公式 $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$



最後一個是平方差公式：

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

它和前兩個長得比較不一樣；看到等號的右邊， $a$  和  $b$  先分別平方之後才減，所以叫做平方差公式。

我們一樣先利用分配律展開  $(a + b)(a - b)$



我知道了！

$$\begin{aligned} (a + b)(a - b) &= a^2 - ab + ba - b^2 \\ &= a^2 - b^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &2012 \times 1988 \\ &= (2000 + 12) \times (2000 - 12) \\ &= 2000^2 - 12^2 \\ &= 4000000 - 144 \\ &= 3999856 \end{aligned}$$

因為  $2012 \times 1988$  數字太大很難乘開，我們觀察一下 2012 與 1988 有什麼共通處？

2012 可以寫成  $2000 + 12$ ，

1988 可以寫成  $2000 - 12$ ，

這樣的話，題目變成  $(2000 + 12) \times (2000 - 12)$  就符合平方差公式。



## 範例 1



◆利用平方差公式求出下面各題的值：

$$\begin{aligned}
 1. \quad & 304 \times 296 \\
 & = (300 + 4) \times (300 - 4) \\
 & = 300^2 - 4^2 \\
 & = 90000 - 16 \\
 & = 89984
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad & 399 \times 401 \\
 & = (400 - 1) \times (400 + 1) \\
 & =
 \end{aligned}$$

◆展開下列各式：

$$\begin{aligned}
 1. \quad & (x + 4)(x - 4) \\
 & = x^2 - 4^2 \\
 & = x^2 - 16
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad & (3 - x)(x + 3) \\
 & =
 \end{aligned}$$

## 小試身手



◆利用平方差公式求出下面各題的值：

$$(1) (500 + 2)(500 - 2) = \underline{\hspace{2cm}} - \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(2) (300 - 5)(300 + 5) = \underline{\hspace{2cm}} \square \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

◆展開下列各式：

$$(1) (x + 1)(x - 1) =$$

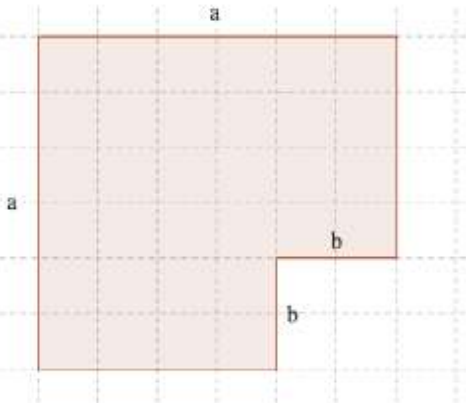
$$(2) (y - 5)(y + 5) =$$

$$(3) (2 - x)(2 + x) =$$



快問快答

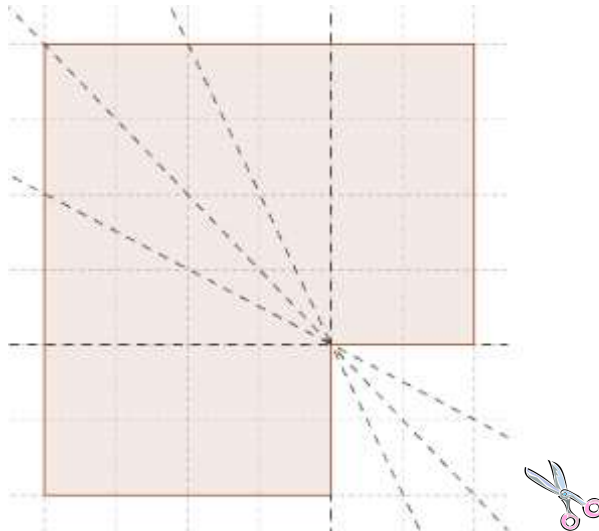
猴爸在猴媽生日時送了一塊缺一角的絲布，形狀如下圖。可是猴媽想將這條絲布變成長方形的披肩，她手邊只有一支不好用剪刀和一些針線，如果剪太多次，這樣拼起來就會很醜，請問猴媽如何只剪“一刀”，就能將分開的兩塊絲布縫成一條長方形披肩？

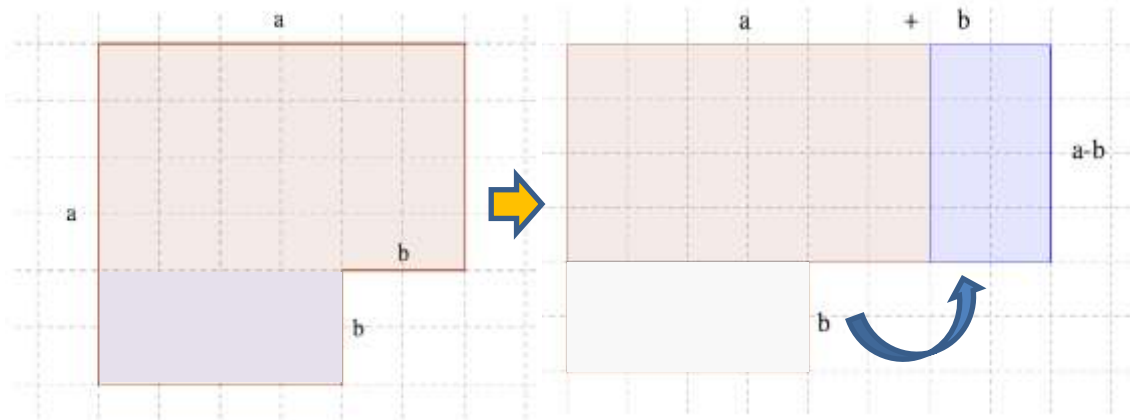
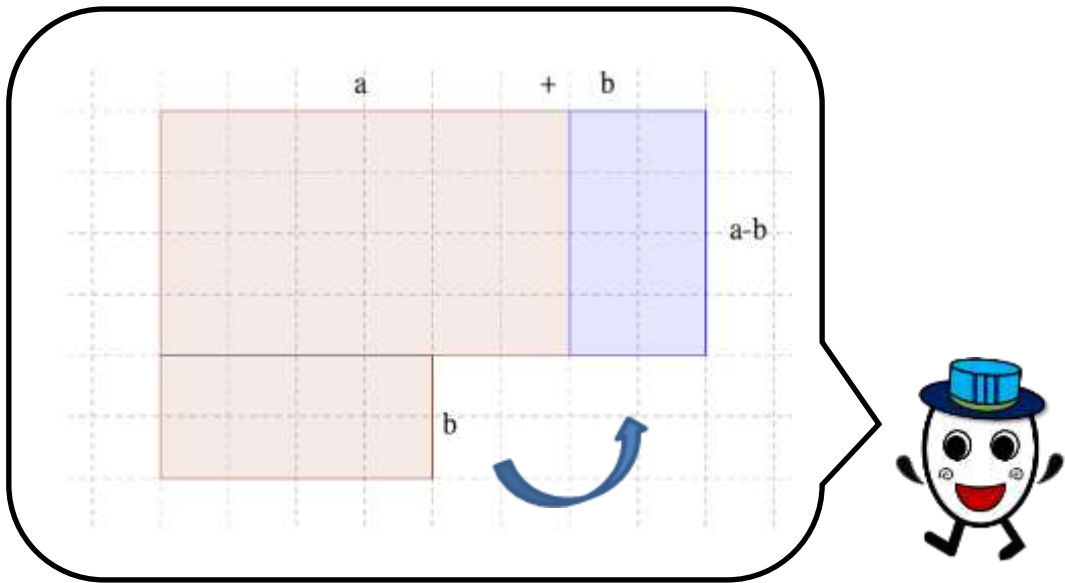


如何將這一塊缺一角的圖形，變成一塊長方形呢？



感覺好像可以這樣剪……可是，我又要怎麼拼呢？





我們來觀察一下小連想到的這種拼法：  
 原本缺一角的圖形，面積為  $a^2 - b^2$ ，  
 經過剪開和拼黏，我們成功的把它變成一塊長方形，  
 這塊長方形的長為  $(a + b)$ ，寬為  $(a - b)$   
 因為面積沒有改變，所以

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$



好像不是只有這種拼湊的方法，可以再動  
 動腦想其他不同的方法，一樣可以拼出面  
 積為  $(a^2 - b^2)$  的長方形喔！

這就是把平方差公式反過來看喔！

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$



範例 2



◆利用平方差公式求下面各題的值：

$$\begin{aligned} (1) \quad 87^2 - 13^2 \\ &= (87 - 13)(87 + 13) \\ &= 74 \cdot 100 \\ &= 7400 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad 103^2 - 9 \\ &= 103^2 - 3^2 \\ &= \end{aligned}$$

◆利用平方差公式將下列各題表示成  $(a + b)(a - b)$  的型式：

$$\begin{aligned} (1) \quad x^2 - 13^2 \\ &= (x + 13)(x - 13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad x^2 - 25 \\ &= x^2 - 5^2 \\ &= \end{aligned}$$

小試身手



◆利用平方差公式計算下面各題的值：

$$\begin{aligned} (1) \quad 87^2 - 13^2 \\ &= (\underline{\hspace{2cm}})(\underline{\hspace{2cm}}) \\ &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad (20.123)^2 - (0.123)^2 \\ &= \end{aligned}$$

◆利用平方差公式將下列各題表示成  $(a + b)(a - b)$  的型式：

$$(1) \quad y^2 - 3^2$$

$$(2) \quad 81 - a^2$$

$$(3) \quad x^2 - y^2$$



我們已經學了三個乘法公式：

和的平方公式  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

差的平方公式  $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

平方差公式  $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

合稱為  
完全平方公式

你都記起來了嗎？



會有乘法公式，是為了方便學習後面的課程，當然，我們將乘法公式應用在數字的計算上也很方便！

在計算一些很大的數字時，想想看能不能套用我們目前學到的乘法公式，說不定用乘法公式就會變得很好算。



我還有個疑問！

如果遇到  $(2x + 3)^2$ ，前面未知數的係數不是 1，那怎麼辦呢？

是不是展開來會變成  $2x^2 + \dots$ ？



不對唷！不過不用擔心！就算係數不是 1，我們一樣可以套公式。

像要展開  $(2x + 3)^2 = ?$

$$(2x + 3)^2$$

$$= (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2$$

遇到這種狀況，我們就是把  $a$  看成是  $2x$ ，  
所以  $a^2$  的部分就要寫成  $(2x)^2$

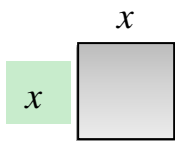
還要注意的是  
 $(2x)^2 \neq 2x^2$   
 $(2x)^2 = (2x)(2x) = 4x^2$



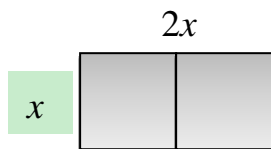
到底  $x^2$ 、 $2x^2$ 、 $(2x)^2$ ，這三者不同在哪裡？



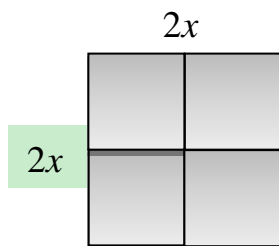
我們就用圖形來比較一下  $x^2$ 、 $2x^2$ 、 $(2x)^2$



面積： $x \cdot x = x^2$



面積： $2x \cdot x = 2x^2$



面積： $(2x)(2x) = 4x^2$   
 $\parallel$   
 $(2x)^2$



原來如此！我終於知道它們的不同了！

## 範例 3



◆將  $(3x)^2$  展開後，和何者必相等？連連看。

$(3x)^2$ •	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>3x^2</math></li> <li>• <math>6x^2</math></li> <li>• <math>9x^2</math></li> </ul>
------------	---

◆利用乘法公式展開下列各式：

1.  $(5x + 2)^2 = ?$

$$\begin{aligned} \text{解：} & (5x + 2)^2 \\ &= (5x)^2 + 2 \cdot 5x \cdot 2 + 2^2 \\ &= 25x^2 + 20x + 4 \end{aligned}$$

2.  $(6x - 1)^2 = ?$

$$\begin{aligned} \text{解：} & (6x - 1)^2 \\ &= (6x)^2 - 2 \cdot 6x \cdot 1 + 1^2 \\ &= \end{aligned}$$

3.  $(3x + 4)(3x - 4) = ?$

$$\begin{aligned} \text{解：} & (3x + 4)(3x - 4) \\ &= (3x)^2 - 4^2 \\ &= \end{aligned}$$

小試身手

◆利用乘法公式展開下列各式

(1)  $(3x + 1)^2 =$

(2)  $(2x - 3)^2 =$

(3)  $(4x + 1)(4x - 1) =$