

主題三 和的平方公式 $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

國中常用的乘法公式有 3 個，為了能夠區分這 3 個公式，我們就來觀察一下：

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

括號裡面的運算符號是“+”，然後括號的外面又有平方，所以就叫它“和的平方公式”



那麼根據分配律展開後是這樣嗎？

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2$$



不是這樣啦！

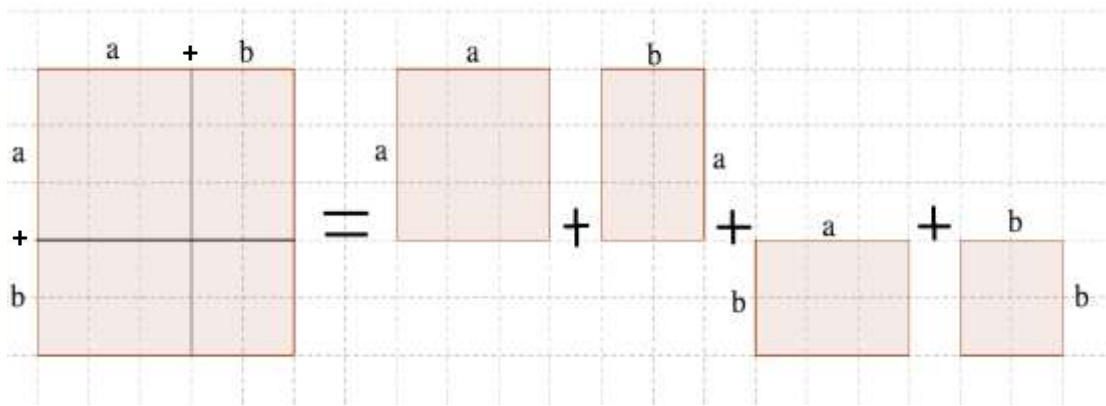
你忘了右上角那個小小的數字代表的意思嗎？

那個小小的 2 是表示自己要連乘兩次！

現在指數在括號的外面，所以我們要括號一整個連乘兩次，把整個括號當成是一整項。

所以 $(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$

我們一樣利用長方形的面積來看看 $(a+b)^2$ 展開後長怎樣？



$$(a+b)^2$$

$$\parallel$$

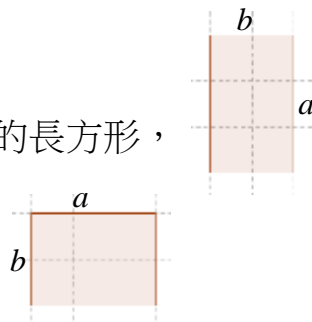
$$(a+b)(a+b) = \underline{\quad} + \underline{\quad} + \underline{\quad} + \underline{\quad}$$



我們現在來看看這塊站著的長方形，

和這塊躺著的長方形，

它們的面積有沒有任何關係呢？



因為乘法具有交換律，
例如： $2 \times 3 = 3 \times 2$
所以 $ab = ba$



$$\begin{aligned} \text{因此 } ab + ba &= ab + ab \\ &= 1 \cdot ab + 1 \cdot ab \\ &= 2ab \end{aligned}$$



我知道了！

$$(a + b)(a + b) = \underline{\quad} + \underline{\quad} + \underline{\quad} + \underline{\quad}$$

也就是說

$$(a + b)^2 = \underline{\quad} + \underline{\quad} + \underline{\quad}$$

現在讓我們做點練習，體驗一下和的平方公式好用的地方！



$$\begin{aligned} 208^2 &= (200 + 8)^2 \\ &= 200^2 + 2 \times 200 \times 8 + 8^2 \\ &= 40000 + 3200 + 64 \\ &= 43264 \end{aligned}$$



如果我們直接乘開的話，可能會因為數字太大導致很難計算，不過把 208 像這樣拆成 $200 + 8$ ，再利用公式，就會比較好算一點。

$$(x + y)^2 = \underline{\quad} + \underline{\quad} + \underline{\quad}$$



範例 1



◆利用和的平方公式計算下面各題的值：

1. $(30.4)^2$

$$= (30 + 0.4)^2$$

$$= 30^2 + 2 \cdot 30 \cdot 0.4 + 0.4^2$$

$$= \underline{\hspace{2cm}} + \underline{\hspace{2cm}} + \underline{\hspace{2cm}}$$

=

2. $(10\frac{2}{3})^2$

$$= (10 + \frac{2}{3})^2$$

=

◆利用和的平方公式展開下列各式：

1. $(x + 1)^2$


$$= x^2 + 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2$$

=

2. $(3 + x)^2$

$$= \underline{\hspace{2cm}} + \underline{\hspace{2cm}} + \underline{\hspace{2cm}}$$

=

小試身手 

◆利用和的平方公式計算下面各題的值：

1. 109^2

$$= (100 + 9)^2$$

$$= \underline{\hspace{2cm}} + \underline{\hspace{2cm}} + \underline{\hspace{2cm}}$$

$$=$$

2. $(2.5)^2$

$$= (2 + 0.5)^2$$

$$= \underline{\hspace{2cm}} + \underline{\hspace{2cm}} + \underline{\hspace{2cm}}$$

$$=$$

3. $(20\frac{1}{4})^2$

$$= (20 + \frac{1}{4})^2$$

$$= \underline{\hspace{2cm}} + \underline{\hspace{2cm}} + \underline{\hspace{2cm}}$$

$$=$$

◆利用和的平方公式展開下列各式：

1. $(x + 2)^2$

2. $(8 + y)^2$



和的平方公式也可以反過來看喔！

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

範例 2



$$\begin{aligned} (1) \quad & 97^2 + 2 \cdot 97 \cdot 3 + 3^2 \\ &= (97+3)^2 \\ &= 100^2 \\ &= 10000 \end{aligned}$$

$$a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a + b)^2$$

$$\begin{aligned} (2) \quad & \left(1\frac{3}{4}\right)^2 + 2 \cdot 1\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 \\ &= \left(1\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)^2 \\ &= 2^2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

小試身手



◆利用和的平方公式計算下列各題的值：

$$(1) \quad 99^2 + 2 \cdot 99 \cdot 1 + 1^2 = (\underline{\quad} + \underline{\quad})^2$$

$$=$$

$$(2) \quad (25.8)^2 + (24.2)^2 + 2 \cdot (25.8) \cdot (24.2) = (\underline{\quad} + \underline{\quad})^2$$

$$=$$