

## 主題四 解一元一次不等式



不等式  $x > -3$ ，很容易看出它的解。  
但不等式  $3x+2 > 11$  你看得出來嗎？

可以慢慢代入檢驗啊！



這麼多個要檢查到什麼時候呀！一定有更簡便的方法，對吧？



別急！讓我來問你個問題。  
阿兩帶了 200 元逛夜市，花 35 元買了一杯珍珠奶茶。而後他看到了他最愛的射飛鏢，一盤 30 元。你認為阿兩最多可以玩幾盤射飛鏢？



5 盤！！！！

你怎麼算的？



因為原本有 200 元，買了珍珠奶茶 35 元後，還剩下 165 元。而 165 除以 30 會得到 5 餘 15，因此最多可以玩 5 盤！！

我們稍微整理一下你的想法

原本有 200 元，可以花費的金額小於或等於 200

珍珠奶茶	射飛鏢
35 元	30 元
1 杯	$x$ 盤
花了 35 元	花了 $30x$ 元
共花了 $35+30x$ 元	

珍珠奶茶花了 35 元，還剩下 165 元

而 165 除以 30 會得到 5，餘 15

最多可以玩 5 盤！

$$\underline{\hspace{2cm}} \leq 200$$

$$35+30x \leq 200$$

$$\begin{array}{r} 35+30x \leq 200 \\ -35 \quad -35 \\ \hline \end{array}$$

$$30x \leq 165$$

$$\begin{array}{r} 30x \leq 165 \\ \hline 30 \quad 30 \end{array}$$

$$x \leq \frac{33}{6} \left(5\frac{1}{2}\right)$$

$x$  可能為 5、4、3、...



這想法跟解一元一次方程式所使用的等量公理好像唷！

是啊，只有一些地方有差異。

那我們一起來觀察不等式有哪些  
運算規則吧！

快告訴我。



Part I 兩邊同時「加」或「減」的運算規則

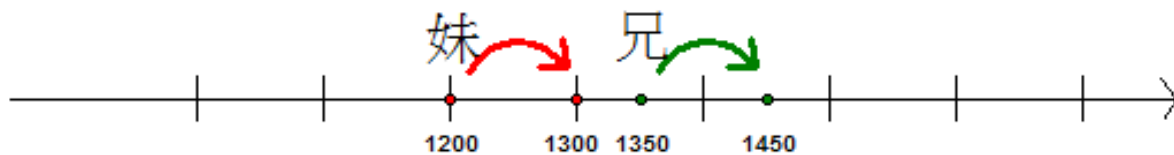
我存了 1350 元，而你存了 1200 元，所以我存的錢比你多。如果媽媽又分別給了我們 100 元的零用錢，我們都把錢存起來。那麼現在我們兩個誰存的錢比較多？

	哥哥	妹妹
原本存了	1350 元	1200 元
多了	100 元	100 元
現在有	1450 元	1300 元

原本 哥哥比較多  
 兩人同加 100 後  
 現在 \_\_\_\_ 比較多



還是你存的錢比較多呀！我可以用數線這樣表示...



哥哥：如果我們今天又一起買了卡片幫媽媽慶祝母親節，各花了 50 元，此時我們倆誰存的錢比較多呢？

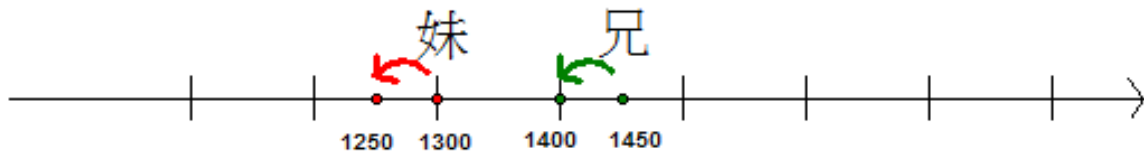
	哥哥	妹妹
原本存了	1450 元	1300 元
花了	50 元	50 元
剩下	1400 元	1250 元

原本 哥哥比較多  
 兩人同減 50 後  
 現在 \_\_\_\_ 比較多



還是你存的錢比較多呀！我可以用數線這樣表示...





我發現了！我們的積蓄一起增加或減少同樣金額，在數線上兩個點是一起同方向移動相同的距離，所以移動前後，多的還是多、少的還是少，會保持原來的大小關係。



跟利用等量公理解方程式一樣，在一個不等式的兩邊，同加或同減一數，則不等式兩邊的大小關係不變。例如：

方程式	不等式
$x+3=5$	$x+3>5$
同減 2	同減 2
$x+1=3$	$x+1>3$

還是保持「=」


還是保持「>」

牛刀小試

在□中填入正確的不等號 (>、<、≥ 或 ≤)。

	已知	不等號兩邊	不等關係
1.	$5>3$	同加 4	$5+4 \square 3+4$
2.	$-7<9$	同減 8	$-7-8 \square 9-8$
3.	$8>-1$	同加 1	$8+1 \square -1+1$
4.	$-3<7$	同減 7	$-3-7 \square 7-7$
5.	$x\geq 5$	同減 2	$x-2 \square 5-2$
6.	$-2x-3\leq 6$	同加 3	$-2x-3+3 \square 6+3$
7.	$6x+4>3$	同減 4	$6x+4-4 \square 3-4$
8.	$-2+5x<-4$	同加 2	$-2+5x+2 \square -4+2$




 例子講解

解下列各一元一次不等式：

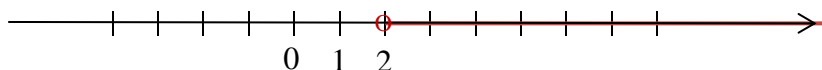
(1)  $x+7>9$

解：  $x+7 > 9$   
 $\quad \quad \quad -7 \quad -7$   
 $x > 2$

兩邊同減 7，  
讓左邊只剩  $x$ 。

表示所有大於 2 的數都是  $x+7>9$  的解。

$x>2$  可圖示如下：



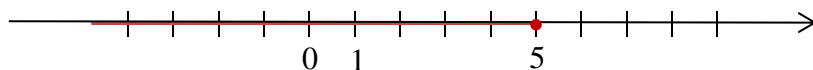
(2)  $-3+x\leq 2$

解：  $-3+x\leq 2$   
 $\quad \quad \quad +3 \quad +3$   
 $x\leq 5$

兩邊同加 3，  
讓左邊只剩  $x$ 。

表示所有小於或等於 5 的數都是  $-3+x\leq 2$  的解。

$x\leq 5$  可圖示如下：



(3)  $12 \geq x - 1$

$$\begin{array}{r} \text{解：} 12 \geq x - 1 \\ \quad + 1 \quad + 1 \end{array}$$

兩邊同加 1，  
讓右邊只剩  $x$ 。

$13 \geq x$


也就是  $x \leq 13$

$13 \geq x$

由左至右讀：「13 大於或等於  $x$ 」

由右至左讀：「 $x$  小於或等於 13」

$x \leq 13$

牛刀小試 

1. 解下列各不等式：

(1)  $x - 2 \leq 7$

(2)  $x + 4 > 9$

(3)  $11 > x + 5$

(4)  $-2 \leq -1 + x$

Part II 兩邊同時「乘以」或「除以」的運算規則

如果一箱保久乳的價錢比一箱綠茶的價錢高，那麼三箱保久乳的價錢與三箱綠茶的價錢誰比較高？

當然是三箱保久乳呀！

那如果我都只買半箱呢？

還是半箱保久乳的價錢比較高呀！

我知道了！跟剛剛加減運算類似，在不等式的兩邊同乘以或同除以一數，不等式兩邊的大小關係不變？

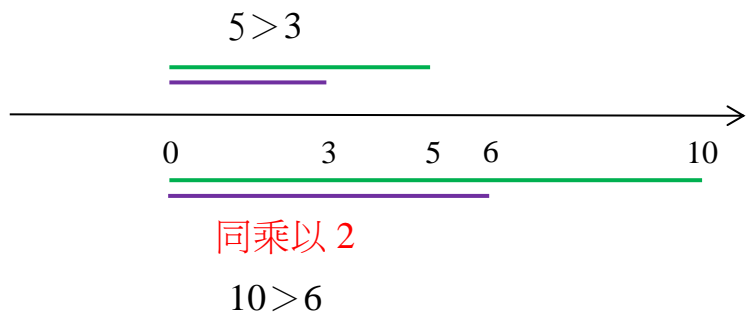
是嗎？我剛剛不是有說會有一些差異嗎？

哦？

(一)不等式兩邊同乘以正數

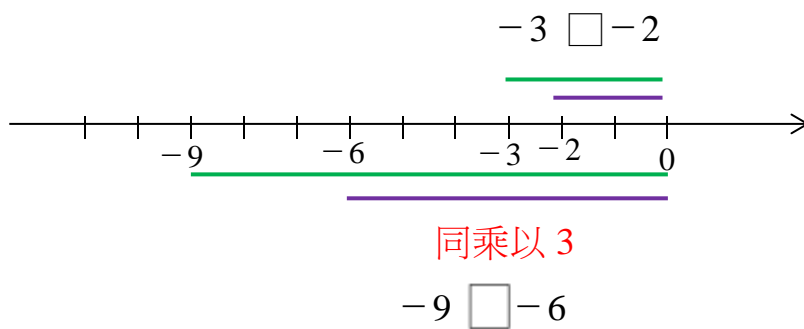
※不等式兩邊同乘以 2

$5 > 3$
$5 \times 2$ $3 \times 2$
$10 > 6$



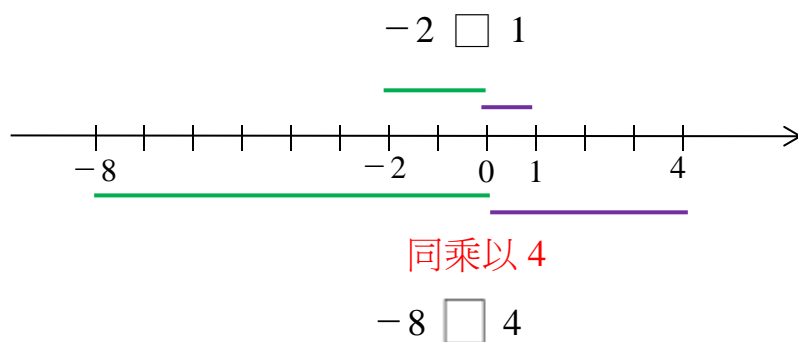
※不等式兩邊同乘以 3

$-3 \square -2$
$(-3) \times 3 \quad (-2) \times 3$
$-9 \square -6$



※不等式兩邊同乘以 4

$-2 \square 1$
$(-2) \times 4 \quad 1 \times 4$
$-8 \square 4$



※不等式兩邊同乘以 2

$4 \square 0$
$4 \times 2 \quad 0 \times 2$
$8 \square 0$

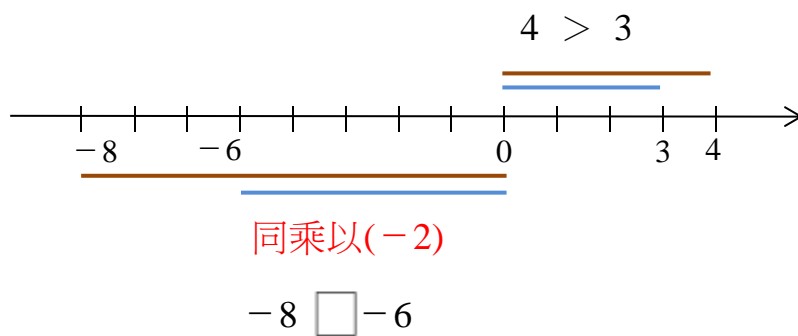
發現：不等式兩邊同乘以「正數」，不等號方向「不會改變」



## (二)不等式兩邊同乘以負數

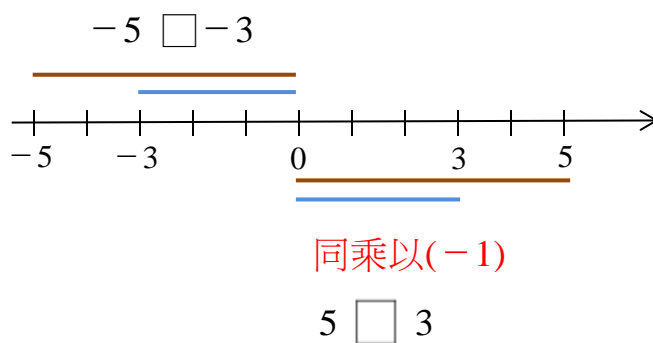
※不等式兩邊同乘以(-2)

$4 > 3$
$4 \times (-2) \quad 3 \times (-2)$
$-8 < -6$



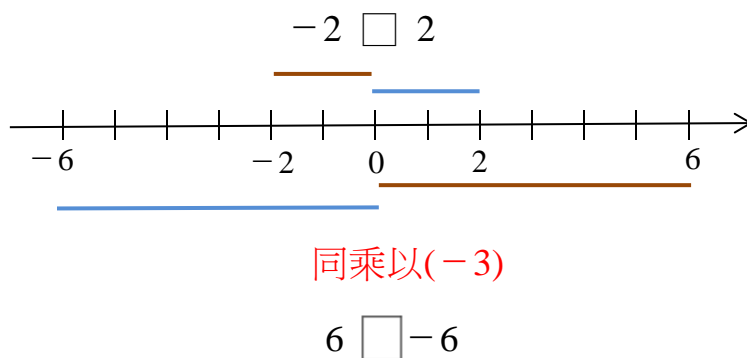
※不等式兩邊同乘以(-1)

$-5 \square -3$
$(-5) \times (-1) \quad (-3) \times (-1)$
$5 \square 3$



※不等式兩邊同乘以(-3)

$-2 \square 2$
$(-2) \times (-3) \quad 2 \times (-3)$
$6 \square -6$



※不等式兩邊同乘以(-10)

$4 \square 0$
$4 \times (-10) \quad 0 \times (-10)$
$-40 \square 0$

發現：不等式兩邊同乘以「負數」，不等號方向「會改變」

(三)不等式兩邊同除以某數(除數不能為0)



那同除以某數的運算規則也是這樣討論嗎？

因為除以某數就等於乘以該數的倒數，例如  $5 \div 3 = 5 \times \frac{1}{3}$ ，所以除法的運算規則與乘法的運算規則相同。



也就是說，需要特別注意的是不等式兩邊同乘(除)以負數的時候囉！




## 例子講解



解下列各一元一次不等式：

<p>(1) <math>7x &gt; 21</math></p> <p>解：</p> $7 \cdot x \frac{\cancel{7}}{\cancel{7}} \frac{21}{7} > \frac{\phantom{21}}{7}$ $x > 3$ <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin-left: 100px;"> <math>7x = 7 \cdot x</math> </div>	<p>(2) <math>-7x &gt; 21</math></p> <p>解：</p> $\frac{\cancel{-7} \cdot x}{\cancel{-7}} < \frac{21}{\cancel{-7}}$ $x < -3$ <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin-left: 100px;"> <math>-7x = -7 \cdot x</math> </div>
<p>(3) <math>-2x \leq 1</math></p> <p>解：</p> $\frac{\cancel{-2} \cdot x}{\cancel{-2}} \geq \frac{1}{\cancel{-2}}$ $x \geq -\frac{1}{2}$	<p>(4) <math>2x \leq 1</math></p> <p>解：</p> $\frac{\cancel{2} \cdot x}{\cancel{2}} \leq \frac{1}{\cancel{2}}$ $x \leq \frac{1}{2}$
<p>(5) <math>6 &gt; 2x</math></p> <p>解：</p> $\frac{6}{2} > \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}}$ $3 > x$ <p>也就是 <math>x &lt; 3</math></p> <div style="border: 2px solid orange; border-radius: 15px; padding: 5px; display: inline-block; margin-left: 100px;">       從左到右念， 再從右到左念     </div>	<p>(6) <math>-6 &lt; 2x</math></p> <p>解：</p> $\frac{-6}{2} < \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}}$ $-3 < x$ <p>也就是 <math>x &gt; -3</math></p>
<p>(7) <math>9 \geq -3x</math></p> <p>解：</p> $\frac{9}{-3} \leq \frac{\cancel{-3}x}{\cancel{-3}}$ $-3 \leq x$ <p>也就是 <math>x \geq -3</math></p>	<p>(8) <math>-5x &lt; 0</math></p> <p>解：</p> $\frac{\cancel{-5}x}{\cancel{-5}} > \frac{0}{\cancel{-5}}$ $x > 0$



牛刀小試

解下列各一元一次不等式：

1.  $4x \geq 16$

2.  $-4x \geq 16$

3.  $9x < -3$

4.  $-3x > 6$

5.  $9 > -3x$

6.  $7 \leq 7x$

7.  $0 < 4x$

8.  $-3x \geq 0$

## 例子講解



解下列各一元一次不等式：

<p>(1) <math>\frac{1}{3}x &lt; 4</math>            解： <math>\frac{1}{3}x \cdot 3 &lt; 4 \cdot 3</math>  <math>x &lt; 12</math></p> <p>兩邊同乘以 3，去分母。</p>	<p>(2) <math>\frac{3}{4}x \geq -2</math>            解： <math>\frac{3}{4}x \cdot 4 \geq -2 \cdot 4</math>  <math>3x \geq -8</math>  <math>x \geq -\frac{8}{3}</math></p> <p>兩邊同乘以 4，去分母。</p>
<p>(3) <math>-x &gt; 5</math>            解： <math>-x \cdot (-1) &lt; 5 \cdot (-1)</math>  <math>x &lt; -5</math></p>	<p>(4) <math>-\frac{1}{3}x &lt; 2</math>            解： <math>-\frac{1}{3}x \cdot 3 &lt; 2 \cdot 3</math>  <math>-x &lt; 6</math>  <math>x &gt; -6</math></p>
<p>(5) <math>-\frac{2x}{5} \leq 4</math>            解： <math>-\frac{2x}{5} \cdot 5 \leq 4 \cdot 5</math>  <math>-2x \leq 20</math>  <math>x \geq -10</math></p>	<p>(6) <math>0 &gt; -x</math>            解： <math>0 \cdot (-1) &lt; -x \cdot (-1)</math>  <math>0 &lt; x</math>            也就是 <math>x &gt; 0</math></p>
<p>(7) <math>-4 \geq \frac{x}{2}</math>            解： <math>-4 \cdot 2 \geq \frac{x}{2} \cdot 2</math>  <math>-8 \geq x</math></p>	<p>(8) <math>4 &lt; -\frac{4}{3}x</math>            解： <math>4 \cdot 3 &lt; -\frac{4}{3}x \cdot 3</math>  <math>12 &lt; -4x</math>  <math>-3 &gt; x</math></p>

牛刀小試



1. 解下列各一元一次不等式：

(1)  $\frac{1}{4}x < -2$


(2)  $-x \leq -1$

(3)  $\frac{3}{2}x < 3$

(4)  $-\frac{3}{5}x \geq 6$

(5)  $-8 \geq -\frac{1}{5}x$

(6)  $0 < \frac{x}{9}$


 例子講解

解下列各一元一次不等式，並在數線上圖示其解：

(1)  $-4x - 5 \geq 11$

解：
$$\begin{array}{r} -4x - 5 \geq 11 \\ \quad \quad \quad \color{red}{+5} \quad \color{red}{+5} \end{array}$$

兩邊同加 5， $\geq$  不會改變

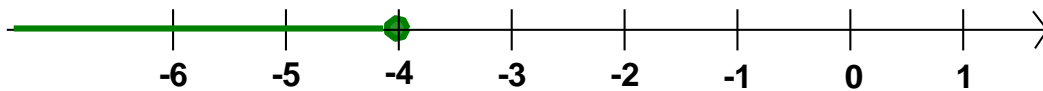
$$-4x \geq 16$$

$$\begin{array}{r} \color{red}{(-4)}x \leq \frac{16}{\color{red}{-4}} \\ \color{red}{-4} \quad \quad \color{red}{-4} \end{array}$$

兩邊同除以  $(-4)$ ， $\geq$  變成  $\leq$

$$x \leq -4$$

$x \leq -4$  可用下圖表示：



(2)  $7 - 3x > -2$

解：
$$\begin{array}{r} 7 - 3x > -2 \\ \quad \quad \quad \color{red}{-7} \quad \quad \color{red}{-7} \end{array}$$

兩邊同減 7， $>$  不會改變

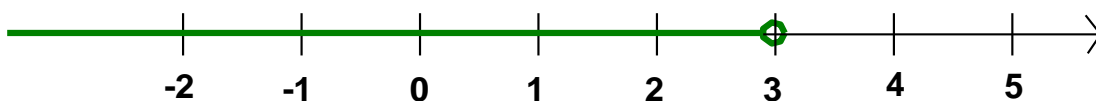
$$-3x > -9$$

$$\begin{array}{r} \color{red}{(-3)}x < \frac{-9}{\color{red}{-3}} \\ \color{red}{-3} \quad \quad \color{red}{-3} \end{array}$$

兩邊同除以  $(-3)$ ， $>$  變成  $<$

$$x < 3$$

$x < 3$  可用下圖表示：



(3)  $34 < 2+4x$

解：  $34 < \cancel{2} + 4x$   
 $\quad \quad \quad \color{red}{-2} \quad \color{red}{-2}$

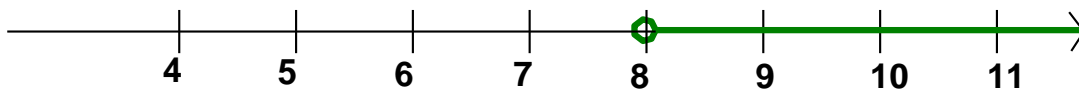
$32 < 4x$

$8 < x$

兩邊同減 2，< 不會改變

兩邊同除以 4，< 不會改變

$8 < x$  可用下圖表示：



牛刀小試

1. 解下列各一元一次不等式：


(1)  $15+4x < 3$

(2)  $-3x+1 > -14$

(3)  $-5-x \geq 7$

(4)  $-6 \leq 6x-24$




 例子講解

解下列各一元一次不等式：

(1)  $4x+3 < -x+8$

解：
$$\begin{array}{r} 4x+3 < -x+8 \\ +x \quad +x \end{array}$$

兩邊同加  $x$ ，讓有  $x$  的在左邊

$$\begin{array}{r} 5x+3 < 8 \\ -3 \quad -3 \end{array}$$

兩邊同減 3，讓沒有  $x$  的在右邊

$$5x < 5$$

$$x < 1$$

兩邊同除以 5

(2)  $5-x \geq x-3$

解：
$$\begin{array}{r} 5-x \geq x-3 \\ -x \quad -x \end{array}$$

兩邊同減  $x$ ，讓有  $x$  的在左邊


$$\begin{array}{r} 5-2x \geq -3 \\ -5 \quad -5 \end{array}$$

兩邊同減 5，讓沒有  $x$  的在右邊

$$-2x \geq -8$$

$$x \leq 4$$

兩邊同除以  $(-2)$ ， $\geq$  變成  $\leq$


 牛刀小試

1. 解下列各一元一次不等式：

(1)  $-5-x < 7+x$

(2)  $2x-6 > 5x-12$