

主題二：複習比例式

兩個比 $a : b$ 和 $c : d$ ，其中 $b, d \neq 0$ ，如果這兩個比為相同的比，

也就是 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ，則記為 $a : b = c : d$ ，那這個式子就稱為比例式。

重點一

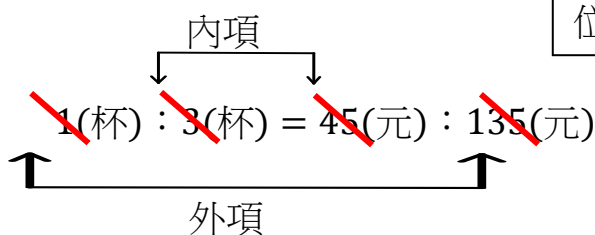
若 $a : b = c : d$ ，則 $ad = bc$ 。(外項乘積 = 內項乘積)

範例 3

一杯珍珠奶茶 45 元，三杯珍珠奶茶 135 元

杯數和價錢的關係為 $= 1 : 3 = 45 : 135$

重點提示：
這是我們遇到單位不同的第一題



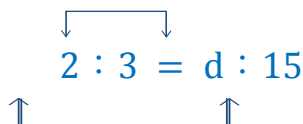
外項乘積 = $1 \times 135 = 135$ ↔ 相等 ↔ 內項乘積 = $3 \times 45 = 135$

範例 4

已知 $2 : 3 = d : 15$ ，則 $d = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

因為 $2 : 3 = d : 15$

利用：外項乘積 = 內項乘積



得 $2 \times 15 = 3 \times d$

$3d = 30$

得 $d = 10$

練習 4

$3 : 4 = 15 : d$ ，則 $d =$ _____。

重點提示：
外項乘積=內項乘積

練習 5

若 $a : 5 = 7 : b$ ，則 $ab =$ _____。

動動腦

設 a, b 為正整數且 $a < b$ ，已知 $a : 3 = 4 : b$ ，
且 $a + b = 8$ ，則 a, b 分別為多少？

重點二

若 $ax = by$ ， a, b 為正整數，則 $x : y = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} = b : a$

例如

已知爸爸的年紀等於小星年紀的 6 倍

則爸爸的年紀：小星的年紀=6：1

設爸爸的年紀為 x ，小星的年紀為 y

已知 $x = 6y$ ，則 $x : y = 6 : 1 = 1 : \frac{1}{6}$

範例 5

若 $4a = 5b$ ，求 $a : b =$ _____。

由 $4a = 5b$

得 $\frac{4a}{5b} = 1$

得 $\frac{a}{b} = \frac{5}{4}$

因此 $a : b = 5 : 4$

練習 6

若 $3a = 7b$ ，求 $a : b =$ _____。

練習 7

一家文具店賣一枝原子筆 15 元，一枝鉛筆 12 元。已知蒼蒼只買原子筆，比比只買鉛筆，而且他們花的錢一樣多，則他們買的枝數比為多少？

動動腦

甲、乙為兩個相同大小，水量不同的杯子，若將甲杯的 $\frac{1}{4}$ 倒入乙杯，得到乙杯的水量為甲杯的兩倍，那麼原來的甲杯水量和原來的乙杯水量的比為？

重點三

若 $a : b = c : d$ ，則 $a : c = b : d$

例如

一杯珍珠奶茶 45 元，三杯珍珠奶茶 135 元

杯數和價錢的關係為 $1 : 3 = 45 : 135$

$$1 : 3 = 45 : 135$$

由外項乘積=內項乘積，得知 $1 \times 135 = 135 = 3 \times 45$

杯數和價錢的關係亦可寫成 $1(\text{杯}) : 45(\text{元}) = 3(\text{杯}) : 135(\text{元})$

利用外項乘積=內項乘積驗證， $1 \times 135 = 135 = 45 \times 3$

和上面的結果一樣，因此 $1 : 3 = 45 : 135$ ，

可推得 $1 : 45 = 3 : 135$

範例 6

若 $a : 5 = b : 20$ ，則 $a : b = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

因為 $a : 5 = b : 20$

可得 $a : b = 5 : 20$

即 $a : b = 1 : 4$

練習 8

若 $24 : a = \frac{2}{3} : b$ ，則 $a : b = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

練習 9

若 $3a : 25 = 2b : 30$ ，則 $a : b = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

重點四

若 $a : b = c : d$ ，則 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ 或 $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ 。

- 從重點三我們知道了

若 $a : b = c : d$ ，則 $a : c = b : d$

除了原先的 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ，

因為 $a : c = b : d$ ，故可得 $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

因此有了重點四。

練習 10

若 $a : b = 5 : 12$ ，則 $\frac{a}{b} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

練習 11

若 $a : 12 = b : 16$ ，則 $\frac{a}{b} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

重點五

若 $a : b = c : d$ ，則 $a = ck$ ， $b = dk$ ($k \neq 0$)。

例如

班上有 30 人，且女生人數：男生人數=2：3，問男生和女生各為多少人？

為了維持比和比值固定，我們會猜測

女生	2	4	...	10	12
男生	3	6	...	15	18
總共	5	10	...	25	30

$$2 : 3 = 12 : 18 = 2 \times 6 : 3 \times 6$$

因此可以設 $2k + 3k = 30$

運算後得 $5k = 30$ ，得 $k = 6$ ，與表格結果相同。

範例 7

設 $a + b = 12$ ， $a : b = 2 : 1$ ，求 a 、 b 之值。

由 $a : b = 2 : 1$

可設 $a = 2k$ ， $b = k$ ，其中 $k \neq 0$

將 $a = 2k$ ， $b = k$ 代入 $a + b = 12$ ，得 $2k + k = 3k = 12$

即 $3k = 12$

得 $k = 4$

所以 $a = 2 \times 4 = 8$ ， $b = 4$

答： $a = 8$ ， $b = 4$ 。

範例 8

若 $x : y = 1 : 3$ ，且 $2x + y = 20$ ，則 $(x - 1) : (y + 1)$ 之比值為何？

由 $x : y = 1 : 3$

可設 $x = 1k = k$ ， $y = 3k$ ，其中 $k \neq 0$

將 $x = k$ ， $y = 3k$ 代入 $2x + y = 20$ 中，

得 $2 \times k + 3k = 2k + 3k = 5k = 20$

即 $5k = 20$

得 $k = 4$

所以得到 $x = 4$ ， $y = 12$

則 $(x - 1) : (y + 1) = (4 - 1) : (12 + 1) = 3 : 13$

其比值為 $\frac{3}{13}$ 。

練習 12

設 a, b 為正整數且 $a > b$ ， $a + b = 72$ ，

$a : b = 2 : 1$ ，求 a 、 b 之值。

練習 13

設 a, b 為正整數且 $a \times b = 108$ ，

$a : b = 3 : 4$ ，則 $(a + 1) : (b + 3)$ 之比值為何？

動動腦

兩個正整數的比為 $15 : 8$ ，且它們的最小公倍數為 360 ，則這兩個數的和為多少？

牛刀小試

1. 某國中一年級與二年級的人數比為 $4 : 5$ ，已知一年級的學生中，有 45% 的學生是搭公車上下學，二年級的學生中，有 36% 的學生是搭公車上下學。請問所有的一、二年級中有多少%的學生是搭公車上下學？

2. 有兩圓，大圓半徑和小圓半徑的比為 5 : 3，則兩圓直徑比為多少？面積比為多少？

概念一點通

1. 若 $a : b = c : d$ ，則 $ad = bc$ 。(外項乘積 = 內項乘積)
2. 若 $ax = by$ ， a 、 b 為正整數，則 $x : y = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} = b : a$ 。
3. 若 $a : b = c : d$ ，則 $a : c = b : d$
4. 若 $a : b = c : d$ ，則 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ 或 $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ 。
5. 若 $a : b = c : d$ ，則 $a = ck$ ， $b = dk$ ($k \neq 0$)。

數學溝通橋

1. 我覺得_____
- (A) 算比例的時候還是習慣用國小的方法
 - (B) 比例不難，但我跟它還是很陌生
 - (C) 我會算計算題了！但是應用問題還是很困難
 - (D) 我看得懂應用題的敘述，但是我不知道該怎麼解
 - (E) 比例對我來講是得心應手的單元了
 - (F) _____