

主題三 「比例式」的運算

一、比例式的運算性質一：

比例式的「內項相乘＝外項相乘」。

動動腦 檢驗比例式「 $1\frac{1}{5} : \frac{6}{7} = 7 : 5$ 」的內項相乘

是否等於外項相乘？

經檢驗，我們發現上面的比例式滿足「內項相乘＝外項相乘」，但是，對於其他的比例式都會成立嗎？

事實上，如果「 $x : y = a : b$ 」，則「 $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$ 」，將算式「 $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$ 」的等號兩邊同乘以 by ，得到「 $\frac{x}{y} \times by = \frac{a}{b} \times by$ 」，所以「 $bx = ay$ 」，也就是說，對於所有比例式都有「內項相乘＝外項相乘」這一個運算性質。

範例 9 「 $3 : 8 = () : 6$ 」，請在括號內填入適當的數值。

解：

在前面的動動腦 5 中，我們利用「比的運算性質」所得到的答案是 40，現在我們試著利用比例式的「內項相乘＝外項相乘」這一個性質來算算看。

首先我們將 () 假設為 x ，原式可改為 $3 : 8 = x : 6$ ，
則 $8 \times x = 3 \times 6$ ，所以 $x = 3 \times 6 \div 8 = \frac{18}{8} = \frac{9}{4}$ 答： $x = \frac{9}{4}$

觀念一點通 比例式的「內項相乘＝外項相乘」這一個性質真是好用啊！同樣的問題不僅跟之前算的答案一樣，而且這樣算還更快哩！

練習 9 求下列各比例式中的 x 值。

$$(1) \quad 6 : \frac{3}{4} = x : 1$$

$$(2) \quad 1.2 : 1.5 = 3 : x$$

$$(3) \quad x : 3 = \frac{5}{6} : 8$$

$$(4) \quad 15 : x = 4 : \frac{4}{5}$$

範例 10 $(x+2) : 6 = x : 3$ ，則 x 為何？

解：

$$\overbrace{(x+2) : 6 = x : 3}^{\quad}, \text{ 則 } 6 \times x = (x+2) \times 3,$$

$$6 \times x = (x+2) \times 3 \quad (\text{分配律})$$

$$6x = 3x + 6$$

$$3x = 6, \text{ 所以 } x=2 \quad \text{答：} x=2$$

練習 10.1 $4 : 3x = 3 : 2$ ，則 x 為何？

練習 10.2 $(x+4) : 8 = 2x : 15$ ，則 x 為何？

前面學到的「比例式的運算性質一」真的很有用喔！

例如：利用它可以解決以下各位同學常遇到的「分數相等可以交叉相乘」的問題。

二、分數相等可以交叉相乘：

若「 $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$ 」，則交叉相乘後仍然相等，可以得到「 $bx = ay$ 」。

說明： $\frac{x}{y}$ 是「 $x:y$ 」的比值，而 $\frac{a}{b}$ 是「 $a:b$ 」的比值，

如果「 $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$ 」，則「 $x:y = a:b$ 」，

根據比例式的運算性質一，我們可以得到「 $bx = ay$ 」，

也就是「 $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$ 」有交叉相乘後仍然相等的運算性質。

範例 11 若「 $\frac{x}{5} = \frac{3}{2}$ 」，則 x 為何？

解：

$$\frac{\cancel{x}}{5} \times \frac{\cancel{3}}{2} \text{ , 故 } x \times 2 = 3 \times 5 \text{ , } x = \frac{3 \times 5}{2} = \frac{15}{2} \quad \text{答: } x = \frac{15}{2}$$

練習 11

(1) 若「 $\frac{x}{6} = \frac{3}{4}$ 」，則 x 為何？

(2) 若「 $\frac{4}{x} = \frac{3}{7}$ 」，則 x 為何？

(3) 若「 $\frac{3x}{4} = \frac{3}{2}$ 」，則 x 為何？

(4) 若「 $\frac{1}{4} = \frac{3}{2x}$ 」，則 x 為何？

前面學到的「比例式的運算性質一」真的很有用喔！

例如：利用它還可以產生以下第二個「比例式的運算性質」。

三、比例式的運算性質二：

在介紹這個性質以前，讓我們先看以下的範例。

範例 12 小益和小靜各有一些零用錢，小益：小靜的零用錢=2：3，且小益和小靜的零用錢共有 500 元，那麼小益和小靜各有多少錢？

解：

因為 小益：小靜的零用錢=2：3， 所以

假如小益的零用錢有 2 元，則小靜有 3 元，

假如小益的零用錢有 20 元，則小靜有 30 元，

假如小益的零用錢有 200 元，則小靜有 300 元，

又小益和小靜的零用錢共有 500 元，所以得到以下答案。

答：小益有 200 元，小靜有 300 元

動動腦 12 承範例 12，若將題目改為「小益：小靜的零用錢=2：3，且小益和小靜的零用錢共有 400 元」，那麼小益和小靜各有多少錢？

從動動腦 12 的解題過程中，相信各位同學可以感受到，將 500 元改為 400 元後，利用「比的運算性質一」變得比較難算了，所以以下將介紹這個好用的「比例式運算性質二」。

由比例式「 $x : y = a : b$ 」，可得「 $ay = bx$ 」，

等號兩邊同除以 ab ，得「 $\frac{ay}{ab} = \frac{bx}{ab}$ 」，也就是「 $\frac{y}{b} = \frac{x}{a}$ 」，

設「 $\frac{y}{b} = \frac{x}{a} = r$ 」，其中 $r \neq 0$ ，則「 $x = ar$ ， $y = br$ 」。

比例式的運算性質二 若「 $x : y = a : b$ 」，則可設
「 $x = ar$ ， $y = br$ ，其中 $r \neq 0$ 」。

範例 13 有一包零食重 200 公克，裡面只有小魚乾和花生，且其重量比為 3：2，則小魚乾多重？花生多重？

解：

因為小魚乾：花生重量=3：2，

所以可設小魚乾重 $3r$ 克，花生重 $2r$ 克， $r \neq 0$

又零食重 200 公克，所以可列式 $3r + 2r = 200$ ，故 $r = 40$ ，

所以小魚乾重 $3 \times 40 = 120$ 克，花生重 $2 \times 40 = 80$ 克。

答：小魚乾重 120 克，花生重 80 克

練習 13.1 鹿鹿國中的男、女學生人數比為 5：3，若男生比女生多 510 人，請問全校學生共有多少人？

練習 13.2 丁丁和拉拉兩人共有 1250 元，且丁丁的錢是拉拉的 4 倍，請問丁丁、拉拉各有幾元？

練習 13.3 中華民國國旗的長與寬之比為 3：2，請問周長為 120 公分的國旗，其長、寬各為多少公分？

從前面的練習中，相信各位同學可以感受到「當 $x : y = a : b$ 時，可設 $x = a r$ ， $y = b r$ ，其中 $r \neq 0$ 」是一個非常好用的性質，為了讓同學能夠更靈活運用這一個性質，以下介紹它的分身。

若「 $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$ 」，其中 $a \neq 0$ ， $b \neq 0$ ，

可設「 $x = a r$ ， $y = b r$ ，其中 $r \neq 0$ 」。

觀念一點通 若「 $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$ 」，則「 $b x = a y$ 」，等號同除以 $b y$ 得
 $\frac{b x}{b y} = \frac{a y}{b y}$ ，即「 $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$ 」，也就是「 $x : y = a : b$ 」，
 所以「 $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$ 」就是「 $x : y = a : b$ 」的分身，
 也可以設「 $x = a r$ ， $y = b r$ ，其中 $r \neq 0$ 」。

範例 14 若「 $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}$ 」，且「 $x + y = 50$ 」，則 $x = ?$ $y = ?$

解：

因為「 $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}$ 」，所以可設 $x = 2 r$ ， $y = 3 r$ ，其中 $r \neq 0$ ，

而且「 $x + y = 50$ 」，也就是「 $2 r + 3 r = 50$ 」，得到 $r = 10$ ，

則 $x = 2 r = 2 \times 10 = 20$ ， $y = 3 r = 3 \times 10 = 30$ 。

答： $x = 20$ ， $y = 30$

重點提示 看到「 $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}$ 」可以想到它是「 $x : y = 2 : 3$ 」的分身，
 可以設「 $x = 2 r$ ， $y = 3 r$ ，其中 $r \neq 0$ 」。

練習 14.1 若「 $\frac{x}{4} = \frac{y}{5}$ 」，且「 $5x + y = 10$ 」，則 $x = ?$ $y = ?$

練習 14.2 若「 $\frac{x}{7} = \frac{y}{8}$ 」，且「 $y - x = 50$ 」，則 $x = ?$ $y = ?$

以下介紹「 $x : y = a : b$ 」的另一個分身。

若「 $bx = ay$ 」，其中 a 、 b 、 x 、 y 皆不為零，
可設「 $x = ar$ ， $y = br$ ，其中 $r \neq 0$ 」。

觀念一點通 若「 $bx = ay$ 」，等號同除以 by 得

$$\left\langle \frac{bx}{by} = \frac{ay}{by} \right\rangle, \text{ 即 } \left\langle \frac{x}{y} = \frac{a}{b} \right\rangle, \text{ 也就是 } \left\langle x : y = a : b \right\rangle,$$

所以「 $bx = ay$ 」就是「 $x : y = a : b$ 」的分身，

也可以設「 $x = ar$ ， $y = br$ ，其中 $r \neq 0$ 」。

範例 15 若「 $3x = 2y$ 」，且「 $x + y = 30$ 」，則 $x = ?$ $y = ?$

解：

因為「 $3x = 2y$ 」，所以可設 $x = 2r$ ， $y = 3r$ ，其中 $r \neq 0$ ，

而且「 $x + y = 30$ 」，也就是「 $2r + 3r = 30$ 」，得到 $r = 6$ ，

則 $x = 2r = 2 \times 6 = 12$ ， $y = 3r = 3 \times 6 = 18$ 。

答： $x = 12$ ， $y = 18$

重點提示 看到「 $3x = 2y$ 」可以想到它是「 $x : y = 2 : 3$ 」的分身，

可以設「 $x = 2r$ ， $y = 3r$ ，其中 $r \neq 0$ 」。

練習 15.1 若「 $3x = 4y$ 」，且「 $x + y = \frac{7}{2}$ 」，則 $x = ?$ $y = ?$

練習 15.2 若「 $9x = 6y$ 」，且「 $x - y = 3$ 」，則 $x = ?$ $y = ?$

練習 15.3 若「 $3x = y$ 」，且「 $x + 5y = 6$ 」，則 $x = ?$ $y = ?$

範例 16 若「 $\frac{2x}{3} = \frac{y}{2}$ 」，則 $x : y$ 為何？

解：

$$\frac{2x}{3} \times \frac{y}{2}$$

得到 $4x = 3y$

答： $x : y = 3 : 4$

練習 16

(1) 「 $\frac{4x}{3} = \frac{y}{4}$ 」則 $x : y = ?$

(2) 「 $\frac{x}{3} = 2y$ 」則 $x : y = ?$

(3) 「 $3x = \frac{y}{4}$ 」則 $x : y = ?$

(4) 「 $\frac{2x}{3} = \frac{7y}{4}$ 」則 $x : y = ?$

動動腦 16 $2x : y = 3 : 5$ ，且 $5x + y = 900$ ，則 $x = ? y = ?$