

## 主題四 加減消去法

### PART I

在前一個主題中，為了求二元一次聯立方程式的解，我們使用代入消去的方式將未知數從 2 個減少為 1 個，於是問題轉變為解一元一次方程式。

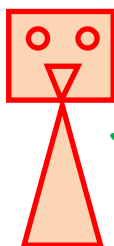
接下來我們要介紹另一種方法…「加減消去法」，我們也從一個簡單的例子開始。

101 文具店的鉛筆每枝  $x$  元，原子筆每枝  $y$  元，  
 大大買 4 枝鉛筆和 2 枝原子筆共需 80 元，  
 小小買 3 枝鉛筆和 2 枝原子筆則需 70 元，  
 問一枝鉛筆幾元？

大芳今天怎麼了？  
 這很明顯啊！一枝鉛筆 10 元。



小圓



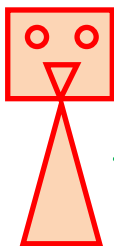
大芳

是啊，說說看，你是怎麼算的？

大大比小小多買 1 枝鉛筆，錢多 10 元，所以一枝鉛筆 10 元。



小圓



大芳

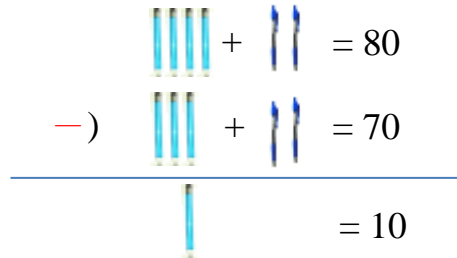
其實你的想法就是加減消去法，畫圖給你看看：

從上面，我們可以列出二元一次聯立方程式

$$\begin{cases} 4x + 2y = 80 & \dots\dots \textcircled{1} \\ 3x + 2y = 70 & \dots\dots \textcircled{2} \end{cases}$$

將①式-②式，

$$\begin{array}{r} 4x + 2y = 80 \\ -) 3x + 2y = 70 \\ \hline x = 10 \end{array}$$



再將  $x = 10$  代回第①式(或第②式也可以)，得到

$$\begin{aligned} 4 \cdot 10 + 2y &= 80 \\ 40 + 2y &= 80 \\ 2y &= 40 \\ y &= 20 \end{aligned}$$

所以一枝鉛筆 10 元、一枝原子筆 20 元。

老師講解 1

解下列各二元一次聯立方程式：

1.  $\begin{cases} x + 3y = 9 & \dots\dots \textcircled{1} \\ x + y = 5 & \dots\dots \textcircled{2} \end{cases}$

**解：**將①式-②式，可以將  $x$  消掉，也就是

$$\begin{array}{r} x + 3y = 9 \\ -) x + y = 5 \\ \hline 3y - y = 9 - 5 \\ 2y = 4 \\ y = 2 \end{array}$$

想辦法把其中一個未知數消掉。

變成一元一次方程式

再將  $y = 2$  代回第②式，得到

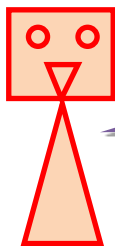
$$\begin{aligned} x + 2 &= 5 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

因此，方程式的解為  $x = 3$ 、 $y = 2$

不要忘記驗算喔。

$$2. \begin{cases} x + 3y = 7 & \dots\dots \textcircled{1} \\ 2x - 3y = -4 & \dots\dots \textcircled{2} \end{cases}$$

這一題用減法好像消不掉一個未知數耶？



也可以用**加法**呀！重點是要能消掉一個未知數！

**解：**將①式 + ②式，可將 y 消掉，

$$\begin{array}{r} \begin{cases} x + 3y = 7 \\ 2x - 3y = -4 \end{cases} \\ +) \quad \hline 3x \quad = 3 \\ \hline x = 1 \end{array}$$


再將  $x=1$  代回第①式，得知

$$\begin{aligned} 1 + 3y &= 7 \\ 3y &= 6 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

因此，聯立方程式的解為  $x=1$ 、 $y=2$

原來加減消去法的意思，是可以兩式相加，也可以用減法，重要的是能消掉一個未知數！才不會做白工！



 複習時間


在下列各題的  $\square$  中，填入 + 或 -。

(1)  $2x \square 2x = 0$

(2)  $-y \square y = 0$

(3)  $5x \square (-5x) = 0$

(4)  $(-3y) \square (-3y) = 0$

 隨堂練習

解下列各二元一次聯立方程式：

1. 
$$\begin{cases} x - 2y = 2 \\ x + 2y = 2 \end{cases}$$

2. 
$$\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 3x + y = 4 \end{cases}$$

3. 
$$\begin{cases} 3x - y = 1 \\ 2x + y = -1 \end{cases}$$

4. 
$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 4x - 3y = -2 \end{cases}$$

5. 
$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ -x - y = -3 \end{cases}$$

**PART II**

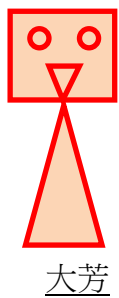
201 文具店的貼紙每張  $x$  元，膠水每瓶  $y$  元，  
 花花買 2 張貼紙和 1 瓶膠水，共需 22 元，  
 壯壯買 3 張貼紙和 2 瓶膠水，共需 38 元，  
 問每張貼紙幾元？每瓶膠水幾元？

根據題意，可列二元一次聯立方程式  $\begin{cases} 2x + y = 22 \\ 3x + 2y = 38 \end{cases}$  來算。

可是不管用加的或減的，都消  
 不掉一個未知數啊？



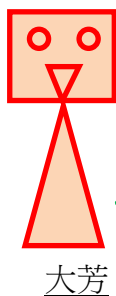
你想想看，如果花花買 4 張貼紙  
 和 2 瓶膠水，則需幾元？



都是 2 倍，所以是 44 元



所以我們可以把方程式  $2x + y = 22$  改成  
 $4x + 2y = 44$



我知道了，這是等量乘法公理，我們可以在方  
 程式的兩邊同乘以 2，這樣就有辦法把  $y$  消掉  
 了。我來算！



$$\begin{cases} 2x + y = 22 & \dots\dots ① \\ 3x + 2y = 38 & \dots\dots ② \end{cases}$$

**解：** 將①式等號兩邊同乘以 2，得到  $2 \cdot (2x+y) = 22 \cdot 2$

化簡得  $4x+2y = 44 \dots\dots ③$

用③式取代①式，與②式聯立

$$\begin{array}{r} \phantom{-)} \begin{cases} 4x + 2y = 44 \\ 3x + 2y = 38 \end{cases} \\ \hline x = 6 \end{array}$$

再將  $x = 6$  代入第①式，得  $12+y = 22$

$$y = 10$$

所以每張貼紙 6 元、每瓶膠水 10 元。

### 老師講解 1

解下列各二元一次聯立方程式：

1.  $\begin{cases} 3x + 2y = 9 & \dots\dots ① \\ -x + 3y = 8 & \dots\dots ② \end{cases}$

乘以 3 後，就有辦法讓  $x$  消掉。

**解：** 將②式的等號兩邊同乘以 3，得到  $3 \cdot (-x+3y) = 8 \cdot 3$

化簡得  $-3x+9y = 24 \dots\dots ③$

用③式取代②式，與①式聯立

$$\begin{array}{r} \phantom{+)} \begin{cases} 3x + 2y = 9 \\ -3x + 9y = 24 \end{cases} \\ \hline 11y = 33 \end{array}$$

$$y = 3$$

再將  $y = 3$  代入第①式，得  $3x + 6 = 9$

$$3x = 3$$

$$x = 1$$

因此，方程式的解為  $x = 1$ 、 $y = 3$

$$2. \begin{cases} 3x - y = 7 & \dots\dots ① \\ 2x - 3y = 0 & \dots\dots ② \end{cases}$$

解： 將①式的等號兩邊同乘以 3，得到  
化簡得  
用③式取代①式，與②式聯立

$$\begin{aligned} 3 \cdot (3x - y) &= 7 \cdot 3 \\ 9x - 3y &= 21 \quad \dots\dots ③ \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} \begin{cases} 9x - 3y = 21 \\ -) \{ 2x - 3y = 0 \end{cases} \\ \hline 7x \quad \quad = 21 \\ x = 3 \end{array}$$

再將  $x = 3$  代入第①式，得  $9 - y = 7$   
 $-y = -2$   
 $y = 2$

因此，方程式的解為  $x = 3$ 、 $y = 2$

$$3. \begin{cases} -4x + 3y = 11 & \dots\dots ① \\ -x + 5y = 7 & \dots\dots ② \end{cases}$$

解： 將②式的等號兩邊同乘以 4，得到  
化簡得  
用③式取代②式，與①式聯立

$$\begin{aligned} 4 \cdot (-x + 5y) &= 7 \cdot 4 \\ -4x + 20y &= 28 \quad \dots\dots ③ \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} \begin{cases} -4x + 3y = 11 \\ -) \{ -4x + 20y = 28 \end{cases} \\ \hline -17y = -17 \\ y = 1 \end{array}$$

再將  $y = 1$  代入第②式，得  $-x + 5 = 7$   
 $-x = 2$   
 $x = -2$

因此，方程式的解為  $x = -2$ 、 $y = 1$

$$4. \begin{cases} 3x - 2y = 1 & \dots\dots ① \\ -5x + 4y = -1 & \dots\dots ② \end{cases}$$

解：將①式的等號兩邊同乘以 2，得到  $2 \cdot (3x - 2y) = 1 \cdot 2$   
化簡得  $6x - 4y = 2 \dots\dots ③$

用③式取代①式，與②式聯立

$$\begin{array}{r} \begin{cases} 6x - 4y = 2 \\ -5x + 4y = -1 \end{cases} \\ +) \\ \hline x = 1 \end{array}$$

再將  $x = 1$  代回第①式，得  $3 - 2y = 1$   
 $-2y = -2$   
 $y = 1$

因此，方程式的解為  $x = 1$ 、 $y = 1$



解下列各二元一次聯立方程式：

$$1. \begin{cases} 4x + 2y = 16 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x - 5y = -1 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} -x + 3y = 5 \\ -3x + 2y = 8 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 2x - 5y = 9 \\ 3x - y = 7 \end{cases}$$



老師講解 2

解下列各二元一次聯立方程式：

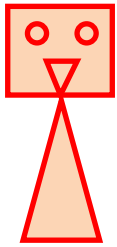
$$1. \begin{cases} -3x + 2y = 1 & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ 2x + 5y = 12 & \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$



小圓

怎麼辦？我看過  $x$ 、 $y$  都沒有辦法消去耶。  
難不成要乘以一個分數？

如果你不想乘以分數當然還有其他辦法。  
**兩式都乘**啊！像我想消掉  $x$ ，就可以這樣做：



大芳

將①式的等號兩邊**同乘以 2**， $2 \cdot (-3x + 2y) = 1 \cdot 2$   
化簡得  $-6x + 4y = 2 \cdots \cdots \textcircled{3}$

將②式的等號兩邊**同乘以 3**， $3 \cdot (2x + 5y) = 12 \cdot 3$   
化簡得  $6x + 15y = 36 \cdots \cdots \textcircled{4}$

用③式取代①式，④式取代②式，寫成聯立

$$\begin{array}{r} \begin{cases} -6x + 4y = 2 \\ +) \quad 6x + 15y = 36 \end{cases} \\ \hline 19y = 38 \\ y = 2 \end{array}$$

再將  $y = 2$  代回第②式，得  $2x + 10 = 12$   
 $2x = 2$   
 $x = 1$

因此，方程式的解為  $x = 1$ 、 $y = 2$

喔喔 我懂了！一模一樣啊！

那為何不消掉  $y$ ，我來試試看。

把①式的等號兩邊同乘以 5，得到  $-15x+10y = 5$  …… ③

把②式的等號兩邊同乘以 2，得到  $4x+10y = 24$  …… ④

也行耶，③－④，就可以消掉  $y$ ，…



小圓

當然都可以，要小心計算哦。



### 隨堂練習

解下列各二元一次聯立方程式：

$$1. \begin{cases} -4x+2y=4 \\ 3x+5y=17 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 5x+2y=7 \\ -2x+3y=1 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 2x-3y=0 \\ 3x-2y=-5 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} -4x+7y=-3 \\ -3x-5y=8 \end{cases}$$

## 老師講解 3

解二元一次聯立方程式：

$$\begin{cases} -3x + \frac{1}{2}y = -1 & \dots\dots ① \\ 2x + y = 6 & \dots\dots ② \end{cases}$$

係數有分數時，可以先利用等量乘法公理，讓分母消失。

**解：** 將①式的等號兩邊同乘以 2，可消去分母，得到  $-6x + y = -2 \dots\dots ③$   
用③式取代①式，與②式聯立

$$\begin{array}{r} -) \begin{cases} -6x + y = -2 \\ 2x + y = 6 \end{cases} \\ \hline -8x \quad = -8 \\ x = 1 \end{array}$$

再將  $x = 1$  代回第②式，得  $2 + y = 6$

$$y = 4$$

因此，方程式的解為  $x = 1$ 、 $y = 4$

## 隨堂練習

解下列各二元一次聯立方程式：

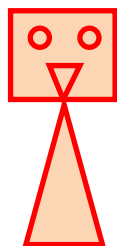
$$1. \begin{cases} -3x - \frac{1}{2}y = 1 \\ 7x + y = -3 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} -\frac{3}{2}x + y = -2 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$$

## 老師講解 4

解下列各二元一次聯立方程式：

$$1. \begin{cases} y + 3x = 5 & \dots\dots \textcircled{1} \\ x - y = 3 & \dots\dots \textcircled{2} \end{cases}$$



大芳

①、②式的  $x$ 、 $y$  沒對齊，比較難觀察，可以先將  $x$ 、 $y$  各自對齊。



小圓

因為①式的左邊是加的，那我可以直接把  $y$  和  $3x$  交換位置，改成  $3x + y = 5$ 。

**解：** 將①式左邊的  $y$  和  $3x$  交換位置，得到  $3x + y = 5$ ，再與②式聯立

$$\begin{array}{r} \begin{cases} 3x + y = 5 \\ +) \begin{cases} x - y = 3 \end{cases} \end{cases} \\ \hline 4x = 8 \\ x = 2 \end{array}$$

再將  $x = 2$  代回第①式，得  $y + 6 = 5$

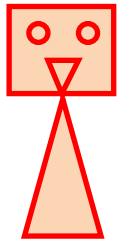
$$y = -1$$

因此，方程式的解為  $x = 2$ 、 $y = -1$



小圓

那如果是  $-y + 3x$ ，我可以把  $y$  和  $3x$  交換位置，重新排成  $-3x + y$  嗎？



大芳

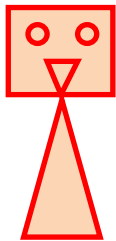
不行哦！雖然  $-y + 3x$  也是加法，但是是  $-y$  和  $3x$  相加，所以重排時要變成  $3x + (-y)$ ，去括號後，變成  $3x - y$ 。

$$\begin{aligned} -y + 3x \\ = 3x - y \end{aligned}$$



小圓

遇到減法，像  $3y - x$  怎麼重排？



大芳

減法可以看成加上相反數，所以  $3y - x$ ，就是  $3y + (-x)$ ，因為加法可以交換位置，所以可以重排成  $-x + 3y$ 。

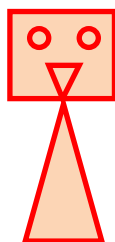
$$\begin{aligned} 3y - x \\ = -x + 3y \end{aligned}$$



小圓

我試試看， $-3y - x$ ，看成  $-3y + (-x)$ ，因為加法可以交換位置，所以可以重排成  $(-x) + (-3y)$ ，再去括號，得到  $-x - 3y$ 。

$$\begin{aligned} -3y - x \\ = -x - 3y \end{aligned}$$



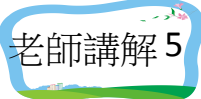
大芳

我幫你整理一下！就是連前面的  $+$ 、 $-$  號一起重排嘛！只是寫在最前面的  $+$  被省略而已。



小圓

我也發現了！


 老師講解 5

將下列各式重排，讓  $x$  的在前， $y$  的在後：

(1)  $2y - 3x$

解： $2y - 3x$   
 $= +2y - 3x$   
 $= -3x + 2y$

(2)  $-4y - 5x$

解： $-4y - 5x$   
 $= -5x - 4y$

(3)  $-3y + x$

解： $-3y + x$   
 $= +x - 3y$   
 $= x - 3y$

(4)  $y - x$

解： $y - x$   
 $= +y - x$   
 $= -x + y$



小圓

那我要練習幾題，讓  $x$  的重排在後， $y$  的在前：


(1)  $5y - 4x = 6$  重排成  $-4x + 5y = 6$

(1)  $2y - x = 1$  重排成 \_\_\_\_\_ = 1

(2)  $-2y + x = 3$  重排成 \_\_\_\_\_ = 3

(3)  $-2y - x = 2$  重排成 \_\_\_\_\_ = 2

(4)  $-2y + 3x = -3$  重排成 \_\_\_\_\_ = -3


 老師講解 6

解二元一次聯立方程式：


$$\begin{cases} -2y + x = 6 & \dots\dots \textcircled{1} \\ x - 3y = 4 & \dots\dots \textcircled{2} \end{cases}$$

**解：** 將①式重排成  $x - 2y = 6$ ，再與②式聯立

$$\begin{array}{r} \cancel{x} - 2y = 6 \\ -) \quad \cancel{x} - 3y = 4 \\ \hline -2y - (-3y) = 6 - 4 \\ \phantom{-2y - (-3y)} = 2 \\ y = 2 \end{array}$$

再將  $y = 2$  代回第②式，得  $x - 6 = 4$   
 $x = 10$

因此，方程式的解為  $x = 10$ 、 $y = 2$


 隨堂練習

解下列各二元一次聯立方程式：

1.  $\begin{cases} y - x = -1 \\ 2x + 9y = 24 \end{cases}$

2.  $\begin{cases} -x + 2y = 5 \\ y - x = 2 \end{cases}$

3.  $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ -y + 3x = 2 \end{cases}$