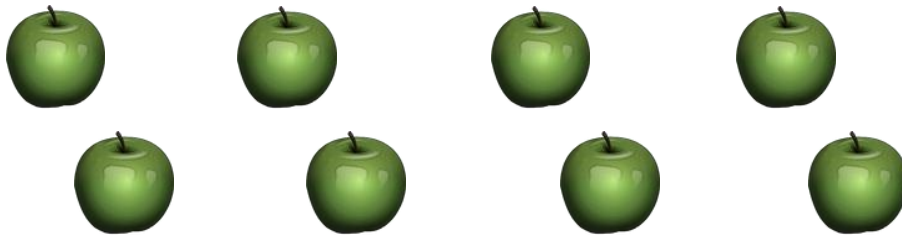


單元四 因數、倍數與質數

主題一 因數與倍數

一、因數與倍數

水果行裡共有 8 顆蘋果，老闆想要將 2 顆蘋果分裝成一袋，



若將兩顆蘋果裝為一袋，並圈起來，請問 8 顆蘋果共可分成幾袋？

其實，我們可以由以上的問題得到右邊的整除式： $8 \div 2 = 4 \dots 0$

此時，因為 2 能整除 8，所以我們便說 2 是 8 的因數，而 8 是 2 的倍數。

。

練習 1:

請同學試著找找看，除了 2 之外，8 是否有其他的因數？（即是否有其他整數能整除 8）

觀念一點通：因數與倍數

若整數 A 可以被整數 B 整除，則稱 B 是 A 的因數，A 是 B 的倍數，

即若 A, B, C 皆為整數，且 $A \div B = C \cdots 0$ ，則稱 B 是 A 的因數，A 是 B 的倍數。

※重點提示：負數也是屬於整數喔！所以因數、倍數也有可能是負數

。

如： $8 \div (-2) = -4 \cdots 0$ ，所以 -2 是 8 的因數，8 也是 -2 的倍數

$(-6) \div 3 = -2 \cdots 0$ ，所以 3 是 -6 的因數，-6 也是 3 的倍數

但因為我們目前設定的學習範圍主要是正整數，所以同學只要先專注於因數、倍數是正整數的情形即可。

範例 1

#	整除式	解釋	#的因數
1	$1 \div 1 = 1 \cdots 0$	1 可被 1 整除	1
2	$2 \div 1 = 2 \cdots 0$ $2 \div 2 = 1 \cdots 0$	2 可被 1, 2 整除	1, 2

#	整除式	解釋	#的因數
3	$3 \div 1 = 3 \cdots 0$ $3 \div 3 = 1 \cdots 0$	3 可被 1, 3 整除	1, 3
4	$4 \div 1 = 4 \cdots 0$ $4 \div 2 = 2 \cdots 0$ $4 \div 4 = 1 \cdots 0$	4 可被 1, 2, 4 整除	1, 2, 4
5	$5 \div 1 = 5 \cdots 0$ $5 \div 5 = 1 \cdots 0$	5 可被 1, 5 整除	1, 5
6	$6 \div 1 = 6 \cdots 0$ $6 \div 2 = 3 \cdots 0$ $6 \div 3 = 2 \cdots 0$ $6 \div 6 = 1 \cdots 0$	6 可被 1, 2, 3, 6 整除	1, 2, 3, 6
7	$7 \div 1 = 7 \cdots 0$ $7 \div 7 = 1 \cdots 0$	7 可被 1, 7 整除	1, 7

#	整除式	解釋	#的因數
8	$8 \div 1 = 8 \cdots 0$ $8 \div 2 = 4 \cdots 0$ $8 \div 4 = 2 \cdots 0$ $8 \div 8 = 1 \cdots 0$	8 可被 1, 2, 4, 8 整除	1, 2, 4, 8
9	$9 \div 1 = 9 \cdots 0$ $9 \div 3 = 3 \cdots 0$ $9 \div 9 = 1 \cdots 0$	9 可被 1, 3, 9 整除	1, 3, 9
10	$10 \div 1 = 10 \cdots 0$ $10 \div 2 = 5 \cdots 0$ $10 \div 5 = 2 \cdots 0$ $10 \div 10 = 1 \cdots 0$	10 可被 1, 2, 5, 10 整除	1, 2, 5, 10

練習 2

() 1. 以下何者不是 100 的因數？

- (A)1 (B)5 (C)15 (D)25 (E)100

() 2.以下何者不是 49 的倍數？

- (A)49(B)98 (C)490 (D)499 (E)539

3.鎮上正舉辦著盛大的嘉年華會，已知遊行隊伍中的一個長方形隊伍是 5 列 12 行,也就是說這個長方形隊伍的人數共有 $5 \times 12 = 60$ 人，以下是關於這個長方形隊伍的敘述,請在正確敘述打 ○，錯的打 x。

() (1) 15 人是這個隊伍人數的因數。

() (2)60 人同時是這個隊伍人數的因數及倍數。

() (3)若這個方陣以 25 人一排變換隊形，則新的隊形也是一個長方形。

() (4)承原題目，若整個遊行活動共有 4 個長方形隊伍，則總人數為 100 人的倍數。

4. 是非題（正確敘述請打○；錯誤敘述請打 x，如果是錯誤敘述，請在後方寫上理由或舉出反例）

() (1) 1 是所有整數的因數，所有整數也是 1 的倍數。理由：

() (2)任何正整數都同時是自己因數與倍數。理由：

() (3)任何整數的倍數都比自己大。理由：_____

() (4)任何正整數的倍數都比因數多。理由：_____

二、因數判別法

在我們了解因數的定義之後，其實，我們可以利用一些技巧很快的知道，某整數的因數有哪些，這種技巧便稱為因數判別法，接下來，我們就來學習如何判斷 2, 3, 5, 11 是否為某整數的因數。

(一) 因數 2 的判別法

目的	判別 2 是否為某數的因數（即某數是否為 2 的倍數）
方法	若某整數的個位數字為偶數(0, 2, 4, 6, 8)，則 2 為此整數的因數
例子	1. 377：個位數字 7 不是偶數，所以 2 不是 377 的因數 2. 208：個位數字 8 是偶數，所以 2 是 208 的因數

練習 3

- ()1. 請用因數判別法，找出下列哪些選項中的數含有因數 2：
- (A) 52(B)78(C)2024(D)1333
- ()2. 請用因數判別法，找出下列哪些選項中的數含有因數 2：
- (A) $4 + 4 + 5$
- (B) $4 \times 4 \times 5$
- (C) 2×201211
- (D) $17 + 13$

(二) 因數 3 的判別法

目的	判別 3 是否為某數的因數（即某數是否為 3 的倍數）
方法	若某整數的各個數字和為 3 的倍數，則 3 為此整數的因數，而此整數為 3 的倍數
例子	<p>1. 123：各個數字和為：$1 + 2 + 3 = 6$，因為 6 是 3 的倍數，所以 3 是 123 的因數</p> <p>2. 407：各個數字和為：$4 + 0 + 7 = 11$，因為 11 不是 3 的倍數，所以 3 不是 407 的因數</p>

練習 4

() 1. 請用因數判別法，找出下列哪些選項中的數含有因數 3：

(A) 870 (B) 12345 (C) 4321 (D) 111111

() 2. 請用因數判別法，找出下列哪些選項中的數含有因數 3：

(A) $11 + 37$

(B) $46 + 432$

(C) $112200 + 33$

(D) 5×101010

(四) 因數 11 的判別法

目的	判別 11 是否為某數的因數（即某數是否為 11 的倍數）
方法	若將某整數的「奇位數字和」與「偶位數字和」，兩數中的大數減掉小數所得到的差為 11 的倍數，則 11 為此整數的因數
例子	<p>1. 55：奇位數字和：5，偶位數字和：5；</p> <p>因為 $5 - 5 = 0$ 是 11 的倍數，所以 11 是 55 的因數</p> <p>2. 2012：奇位數字和：$2 + 0 = 2$，偶位數字和：$1 + 2 = 3$；</p> <p>因為 $3 - 2 = 1$ 不是 11 的倍數，所以 11 不是 2012 的因數</p>

練習 6

() 1. 請用因數判別法，找出下列哪些選項中的數含有因數

11:

(A) 121×232 (B) 222(C) 2222(D) 314126

主題二 質數與合數

一、質數與合數

一星期 7 天中有 2 天是假日，棋盤網格一排是 19 格，五元硬幣上有數字 5，吃到飽便宜一點要 199 元，以上的 7, 2, 19, 5, 199 都是質數。

其實只要同學細心觀察，就會發現其實我們生活中到處充滿著質數，質數究竟是什麼呢？

我們先來回想質數的意義：

觀念一點通：質數

大於 1 的正整數(自然數)中，只能被 1 與本身整除的數，

我們也可以理解成：大於 1 的正整數中，只有兩個正因數（即 1 與本身）的數。

範例 1

#	#的因數	因數個數	歸類與理由	圖示
1	1	1 個	1 不大於 1 且只有一個因數， 所以 1 <u>不是</u> 質數	■
2	1, 2	2 個	2 只有 1, 2 這兩個因數， 所以 2 是質數	■■
3	1, 3	2 個	3 只有 1, 3 這兩個因數， 所以 3 是質數	■■■ ■■ ■■
4	1, 2, 4	3 個	4 有 1, 2, 4 共三個因數， 所以 4 <u>不是</u> 質數	■■■■
5	1, 5	2 個	5 只有 1, 5 這兩個因數， 所以 5 是質數	■■■■■ ■■■ ■■■
6	1, 2, 3, 6	4 個	6 有 1, 2, 3, 6 共四個因數， 所以 6 <u>不是</u> 質數	■■■■■■

#	#的因數	因數個數	歸類與理由	圖示
7	1, 7	2 個	7 只有 1, 7 這兩個因數, 所以 7 是質數	■■■■■■■
8	1, 2, 4, 8	4 個	8 有 1, 2, 4, 8 共四個因數, 所以 8 <u>不是</u> 質數	■■■■ ■■■■ ■■■■■■■
9	1, 3, 9	3 個	9 有 1, 3, 9 共三個因數, 所 以 9 <u>不是</u> 質數	■■■ ■■■ ■■■■■■■
10	1, 2, 5, 10	4 個	10 有 1, 2, 5, 10 共四個因 數, 所以 10 <u>不是</u> 質數	■■■■■■■ ■■ ■■ ■■ ■■

數學溝通橋 1

1. 兩人一組，依序用自己的想法向對方解釋質數的意義。
2. 請共同找出數字 1 到 20 中所有的質數，並解釋理由。
3. 請小組討論例中圖示與質數的關係。
4. 請班上每個同學選擇一個 50 以內的數，然後請選到質數的同學舉手。

根據質數的定義及上方數學溝通橋 1，我們可以知道有許多的正整數並非質數，這時候我們可以把這些除了 1 與本身之外，還可以被其他正整數整除的數稱為成合數。

觀念一點通：合數

大於 1 的正整數中，除了 1 與本身之外，還能被其他自然數整除的數，我們也能理解成：大於 1 的正整數中，正因數個數超過兩個（1 與本身）的數。

數學溝通橋 2

1. 根據合數的意義,討論 1 ~ 10 的 10 個數, 並找出合數。
2. 請小組共同找出數字 1 到 20 中所有的合數, 並解釋理由。
3. 請問 1 是質數還是合數。
4. 請小組討論所有的自然數中, 是否不是質數就是合數。

練習 1

1. 請辨別 0, 1, 13, 18, 21, 5, 29, 47 這些數字是質數還是合數, 或兩者都不是 (提示:可以試試因數判別法)

質數：_____

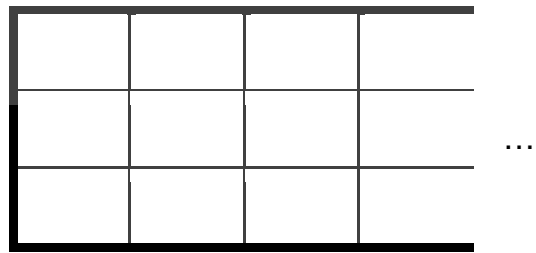
合數：_____

兩者都不是：_____

2. 右圖為某月份的日曆, 請將各週中日期是質數的圈出來, 並回答第幾週有最多的日期是質數?

	日	一	二	三	四	五	六
第一週	1	2	3	4	5	6	7
第二週	8	9	10	11	12	13	14
第三週	15	16	17	18	19	20	21
第四週	22	23	24	25	26	27	28
第五週	29	30	31				

3. 有一個長方形的大盒子如右圖，盒子是由大小一樣的小格子排列而成，但不知到它總共有多少格子，若有一台機器在每個格子中各放置一塊蛋糕，請問當機器把整個盒子裝滿後，這個大盒子中的蛋糕數目是否為質數？為什麼？



- 4.是非題（正確敘述請打 ○；錯誤敘述請打 X，如果是錯誤敘述，請在後方寫上理由或舉出反例）

- () (1)任何一個正整數，若不是質數就是合數。
- () (2)1 是奇數中唯一不是質數的數。
- () (3)2 是偶數中唯一的質數。
- () (4)所有質數的正因數都只有兩個，即 1 和自己。
- () (5)兩質數相乘得到的積也是質數。

二、埃拉托賽尼篩選法 (the Sieve of Eratosthenes, 以下簡稱埃氏篩法)

在了解質數的意義後，我們接著要來介紹埃氏篩法，因為它能幫助我們順利地找出某範圍內的質數。

埃氏篩法是一種用已知質數尋找其他質數的方法，它的基本想法就好比用篩子把質數的倍數層層過濾，如此一來，剩下的質數也會一一現形。

直接舉個例子，我們試著用篩選的想法來找出 20 以內的質數。

範例 2

步驟	說明	得到質數	流程圖																			
一	我們已知 1 不是質數，所以先去掉 1 (把 1 劃掉)	無	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
二	因為 2 是質數，所以我們把 2 圈起來；接著，我們把 2 的倍數中大於 2 的數 (如：4, 6, 8, ...) 通	2	1	②	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
三	因為 3 不是 2 的倍數，所以沒被劃掉，代表 2 不是 3 的因數，所以 3 是質數；接著把 3 圈起來，並	3	1	②	③	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

四	因為 4 已被劃掉，即不是質數， 所以直接考慮 5，因為 5 沒被劃 掉，代表 2, 3, 4 皆不是 5 的因數，	5	1	②	③	4-	⑤
			6	7	8	9	10
			11	12	13	14	15
			16	17	18	19	20
五	接著之後，皆以此類推，當遇到 沒被劃掉的數，那個數就是質數， 我們把它圈起來，並劃掉它的倍		1	②	③	4-	⑤
			6	⑦	8	9	10
			11	12	13	14	15
			16	17	18	19	20

希望同學能從上面的例子中，感受到埃氏篩法由已知質數搜尋未知質數的篩選精神。**觀念一點通**：以下為埃氏篩法的正式作法：

當我們要找出某 1 到某正整數 N 中的質數時，

步驟 1：因為 1 不是質數，我們先把 1 刪掉

步驟 2：因為 2 沒被篩掉，所以把 2 留下並圈起來，再篩掉 2 的倍數，

步驟 3：因為 3 沒被篩掉，所以把 3 留下並圈起來，再篩掉 3 的倍數，

步驟 4：因為 4 已經被篩掉(4 是 2 的倍數，不是質數)，所以跳過 4，

步驟 5：因為 5 沒被篩掉，所以把 5 留下並圈起來，再篩掉 5 的倍數，

步驟 6：因為 6 已經被篩掉(6 是 2, 3 的倍數，不是質數)，所以跳過 6, …

步驟 N：以此類推，直到篩選到正整數 N，

最後，所有被圈起來的數就是 1 到 N 中的質數。

※重點提示：已被劃掉的數字，即不是質數，所以可以省略檢驗的程序。

範例 3

我們用埃氏篩法的正式作法來找出 1 到 10 中的質數。(省略檢驗被劃掉的數)

步驟	說明	動作
1	因為 1 不是質數, 所以先劃掉 1	1 , 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10
2	2 沒被劃掉, 所以圈起 2, 劃掉 2 的倍數	1 , ②, 3, 4 , 5, 6 , 7, 8, 9, 10
3	3 沒被劃掉, 所以圈起 3, 劃掉 3 的倍數	1 , ②, ③, 4 , 5, 6 , 7, 8, 9, 10
4	5 沒被劃掉, 所以圈起 5, 劃掉 5 的倍數	1 , ②, ③, 4 , 5, 6 , 7, 8, 9, 10
5	7 沒被劃掉, 所以圈起 7, 劃掉 7 的倍數	1 , ②, ③, 4 , ⑤, 6 , ⑦, 8, 9, 10
結果	所以 2, 3, 5, 7 就是 1 到 10 中的質數	②, ③, ⑤, ⑦

到這裡, 同學是不是能夠了解埃氏篩法的原理及意義了呢?

數學溝通橋 3

請兩人一組，用埃氏篩法協力圈找出 100 以內的質數。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

主題三 質因數與標準分解式

一、質因數

在了解因數與質數的定義之後，我們來考慮一個情形：

6 的因數有 1, 2, 3, 6，其中 2, 3 是 6 的因數，同時也是質數，我們就稱 2, 3 為 6 的質因數。

觀念一點通：質因數

若整數 A 的某個因數 a 也是質數，則稱 a 為 A 的質因數，

如：10 的因數 5 同時也是質數，所以 5 是 10 的質因數。

範例 1

#	# 的因數	# 的質因數
10	1, 2, 5, 10	2, 5
11	1, 11	11
12	1, 2, 3, 4, 6, 12	2, 3
13	1, 13	13
14	1, 2, 7, 14	2, 7

15	1, 3, 5, 15	3, 5
----	-------------	------

練習 1

1. 請分別列出以下數字的所有因數與質因數:

a. 1 因數：_____ 質因數：_____

b. 9 因數：_____ 質因數：_____

c. 23 因數：_____ 質因數：_____

d. 27 因數：_____ 質因數：_____

e. 31 因數：_____ 質因數：_____

2. 已知 28, 49, 56 這三個數有一個共同的質因數, 請把它找出來。

3. 若某個質數的質因數是一個偶數, 請想想看, 這個質數是多少?

4. 是非題（正確敘述請打○；錯誤敘述請打 x，如果是錯誤敘述，請在後方寫上理由或舉出反例）

() (1) 所有的質數都剛好有一個質因數。理由：

() (2) 所有整數都有質因數。理由：_____

() (3) 任意整數的質因數都是該整數的因數。理由：

() (4) 某整數的因數個數可能少於其質因數個數。理由：

() (5) 有可能某整數的因數全都是質因數。理由：

二、質因數分解與標準分解式

我們知道 20 的因數有 1, 2, 4, 5, 10, 20,

回想一下因數的定義：整數 A 可以被整數 B 整除，則稱 B 是 A 的因數，

所以我們得到：

$$20 \div 1 = 20 \cdots 0 \qquad 20 = 1 \times 20$$

$$20 \div 2 = 10 \cdots 0 \qquad 20 = 2 \times 10$$

$$20 \div 4 = 5 \cdots 0 \quad \text{而左式能寫成} \quad 20 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$20 \div 5 = 4 \cdots 0 \qquad 20 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$20 \div 10 = 2 \cdots 0 \qquad 20 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$20 \div 20 = 1 \cdots 0 \qquad 20 = \underline{\hspace{2cm}}$$

因此，我們可以把 20 分解成其因數的乘積： $20 = 1 \times 20 = 2 \times 10 = 4 \times 5$

同樣地，請同學試著將 30 寫成兩種其因數的乘積，30： ，

 而由 20 與 30 的分解，我們可以知道每個正整數似乎都可

以寫成許多種其因數的乘積，所以，我們很自然的便會思考：所有正

整數是否存在唯一的一種分解形式，方便我們探討其性質？

這時，我們就要利用到質因數分解來表示任意正整數。

觀念一點通：質因數分解

將某正整數分解成其質因數的乘積，則此過程稱為質因數分解，

如： $20 = 4 \times 5 = \underline{2 \times 2 \times 5}$ (2 和 5 為 20 的質因數)

觀念一點通：為什麼 20 的質因數分解不能寫成 $1 \times 2 \times 2 \times 5$ ？

答案：因為 1 不是質數，所以根據質因數分解的定義，20 不寫成 $1 \times 2 \times 2 \times 5$ 。

事實上，這個問題在某個角度上，也解釋了為什麼質數的定義中要有大於 1 的限制，如果考慮把 1 歸類成質數，則任何正整數的質因數分解便不唯一了！

如： $20 = \underline{1} \times 2 \times 2 \times 5 = \underline{1 \times 1} \times 2 \times 2 \times 5 = 1 = \underline{1 \times 1 \times 1} \times 2 \times 2 \times 5 = \dots$

範例 2

#	#的因數	# = 其因數的乘積	#的質因數	質因數分解
10	1, 2, 5, 10	$1 \times 10 = 2 \times 5$	2, 5	2×5
11	1, 11	1×11	11	11
12	1, 2, 3, 4, 6, 12	$1 \times 12 = 2 \times 6 = 3 \times 4$	2, 3	$2 \times 2 \times 3$
13	1, 13	1×13	13	13
14	1, 2, 7, 14	$1 \times 14 = 2 \times 7$	2, 7	2×7

練習 2

() 1. 請問下列何者為 32 的質因數分解？

- (A) 2×16 (B) $1 \times 4 \times 8$ (C) $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ (D) $1 \times$

32

2. 下列為某些正整數其因數的乘積，請分別改寫成質因數分解形

式：

a. $2 \times 4 =$ _____ b. $1 \times 5 \times 12 =$ _____

c. $3 \times 4 \times 6 =$ _____ d. $1 \times 18 =$ _____

到這裡，正整數的質因數分解表示法雖然唯一了，但它的寫法仍然不夠精簡

所以我們要引入標準分解式，在此之前，我們先介紹指數記法的概念。

因為我們知道 $2 \times 2 \times 2$ ，代表 3 個 2 相乘，因此我們就可以把 $2 \times 2 \times 2$ 記成 2^3 ，而這種形式就稱為指數記法。

觀念一點通：指數記法

我們將 k 個正整數 a 相乘記成 a^k ，讀作 a 的 k 次方；注意： k 標在 a 的右上方，如： $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4$ ，意義：4 個 2 相乘為 2 的 4 次方。

※**重點提示**：當 $k=0$ 時，一律規定為 1，如： $2^0 = 1$ ； $7^0 = 1$ ； $10^0 = 1$

當 $k=1$ 時，我們通常會把 1 次方省略，如： $2^1 = 2$

練習 3

1. $7 \times 7 \times 7 = (\quad)$ ，意義：_____

2. $5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = (\quad)$ ，意義：_____

3. $19 \times 19 \times 19 = (\quad)$ ，意義：_____

觀念一點通：標準分解式

將某正整數質因數分解寫成以下形式，稱為此正整數的標準分解式：

1. 質因數由左至右相乘時，需由小到大。
2. 相同質因數連乘時，需表示成次方或指數記法。

如 20 的標準分解式： $20 = \underset{\text{質因數分解}}{2 \times 2 \times 5} = \underset{\text{標準分解式}}{2^2 \times 5}$

範例 3

#	質因數分解	標準分解式
10	2×5	2×5
11	11	11
12	$\underline{2} \times \underline{2} \times 3$	$\underline{2}^2 \times 3$
13	13	13
14	2×7	2×7
15	3×5	3×5

練習 4

請將下列質因數分解的表示式分別改寫成標準分解式：

$$1. 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$2. 7 \times 7 \times 2 \times 3 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$3. 5 \times 3 \times 2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$4. 5 \times 7 \times 11 \times 7 \times 5 = \underline{\hspace{2cm}}$$

標準分解式的條件：

1. 相異質因數由小至大相乘
2. 相同質因數連乘用指數型式

三、由短除法求標準分解式

在同學有了質因數分解及標準分解式的初步概念之後，

我們現在需要思考的便是：如何快速的寫出一個正整數的標準分解式？

在這裡，我們要引入短除法這個技巧。

我們先直接觀察一個例子：

範例 4

步驟	算式	原理	解釋
1	$24 \cdots \underline{124}$	—	假設我們找出 24 的標準分解式，則我們先寫上 24，並且畫上短除記號，短除記號有點像上下顛倒的除法符號
2	$\begin{array}{r} 2 \cdots \underline{2 24} \\ 12 \cdots \underline{12} \end{array}$	$24 = 2 \times 12$	<p>由於標準分解式是由質因數分解而來，所以我們需要將 24 寫成其質因數的乘積，而 24 的質因數有 2, 3，我們先由 2 開始分解，24 可以分解成 2×12（標灰色的數），因為 12 不是 24 的質因數，所以我們要繼續分解 12</p> <p>注意：列在最左邊的數字是方便讓同學觀察，正式計算短除式時不必寫出</p>

步驟	算式	原理	解釋
3	$\begin{array}{r} 2 \cdots 2 \overline{)24} \\ 2 \cdots 2 \overline{)12} \\ 6 \cdots 6 \end{array}$	$\begin{aligned} 24 &= 2 \times 12 \\ &= 2 \times (2 \times 6) \end{aligned}$	<p>同第二步驟，我們要分解 12，一樣用 24 的質因數 2 整除，所以 12 可以分解成 2×6，到這裡，我們已經明顯可以發現 24 已被分解成 $2 \times 2 \times 6$，但因為 6 仍不是 24 的質因數，所以我們還要繼續分解 6</p>
4	$\begin{array}{r} 2 \cdots 2 \overline{)24} \\ 2 \cdots 2 \overline{)12} \\ 2 \cdots 2 \overline{)6} \\ 3 \cdots 3 \end{array}$	$\begin{aligned} 24 &= 2 \times 12 \\ &= 2 \times 2 \times 6 \\ &= 2 \times 2 \times (2 \times 3) \end{aligned}$	<p>因為 6 可再被 2 整除，所以我們再繼續分解，得到 $6 = 2 \times 3$，到這裡，我們已經分解到全部都是 24 的質因數相乘了，即 $24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$，也就是說，我們已經完成 24 的質因數分解</p>

步驟	算式	原理	解釋
5	$\begin{array}{l} 2 \cdots 2 \mid 24 \\ 2 \cdots 2 \mid 12 \\ 2 \cdots 2 \mid 6 \\ 3 \cdots 3 \end{array}$	$\begin{array}{l} 24 \\ = \underline{2 \times 2 \times 2} \\ \times 3 \\ = \underline{2^3 \times 3} \end{array}$	<p>我們已經得到 24 的質因數分解式：$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$，而我們還要進一步化成標準分解式，還記得標準分解式的兩個條件嗎？</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 質因數由小乘到大 2. 用指數記法表達相同質因數連乘。 <p>所以 24 的標準分解式就是：$2^3 \times 3$，同學瞭解了嗎？</p>

練習 5

1. 請觀察下列的短除式，並分別直接寫下其標準分解式：

a.

$$2 \mid 28$$

$$2 \mid 14$$

7

b.

$$2 \mid 48$$

$$2 \mid 24$$

$$2 \mid 12$$

$$2 \mid 6$$

3

c. 若把短除記號裡的數全遮起來，

請嘗試找出此數的標準分解式。

$$2 \mid \blacksquare$$

$$2 \mid \blacksquare$$

$$2 \mid \blacksquare$$

$$5 \mid \blacksquare$$

3

標準分解式：_____ 標準分解式：_____ 標準分解式：_____

2.請用短除法分別計算出下列數字的標準分解式:

a.

$$\underline{125}$$

b.

$$\underline{154}$$

c.

$$\underline{170}$$

標準分解式：_____ 標準分解式：_____ 標準分解式：_____

3. 老師的筆記本上原本寫了某數的短除法計算過程及其標準分解式,

但粗心的老師不小心打翻油墨, 以至於現在筆記本中只依稀看的清楚部分算式, 如下圖, 請聰明的你協助老師找回某數以及它的標準分解式。

短除式: $2 \overline{) \blacksquare}$

$\blacksquare \overline{) \underline{\blacksquare} 2 \blacksquare}$

$2 \overline{) \underline{\blacksquare} 1 \blacksquare}$

$\blacksquare \overline{) \underline{\blacksquare} \blacksquare}$

$3 \overline{) \underline{\blacksquare} \blacksquare}$

7

標準分解式:

$\blacksquare = 2^{\blacksquare} \times \blacksquare^2 \times \blacksquare$

主題四 公因數、公倍數與互質

一、公因數與最大公因數

現在，我們來列出 4 和 6 的因數

4 的因數：1, 2, 4

6 的因數：1, 2, 3, 6

同學有發現 4 和 6 都包含因數 1, 2 嗎？

在這樣的情形下，我們稱 1, 2 為 4 和 6 的公因數

觀念一點通：公因數

若整數 c 是 A, B 兩整數共同的因數，則稱 c 是 A 和 B 的公因數，

如：2 是 4 的因數也是 6 因數，所以我們就說 2 是 4 和 6 的公因數。

範例 1

題號	#	# 的因數	公因數	解釋
1	15	1, 3, 5, 15	1, 3	因為 1, 3 是 15 和 18 共同的因數, 所以 1, 3 是 15 和 18 的公因數
	18	1, 2, 3, 6, 9, 15		
2	7	1, 7	1	因為只有 1 是 15 和 18 共同的因數, 所以 15 和 18 的公因數只有 1
	17	1, 17		
3	13	1, 13	1, 13	因為 1, 13 是 13 和 26 共同的因數, 所以 1, 13 是 13 和 26 的公因數
	26	1, 2, 13, 26		

練習 1

1. 請找出以下各小題的公因數：

a. 6, 9 : _____ b. 12, 24 : _____

b. 13, 15 : _____ d. 21, 28 : _____

2. 若 A 為 16 和 32 的正公因數個數, B 為 18 和 26 的正公因數個數, 請問 $A + B$ 是多少?

3. 桌上有 15 顆橘子和 20 根香蕉, 已知小明把橘子和香蕉平分到好幾個盤子裡, 且剛好能分完, 請問聰明的你, 桌上共有幾個盤子?

事實上, 兩整數的公因數常常有很多個, 此時, 我們把這些公因數中最大的數命名為最大公因數。

觀念一點通：最大公因數

若 d 為 A, B 兩整數的公因數中最大者, 則稱 d 為 A 和 B 的最大公因數, 用小括號記為 $(A, B) = d$ 。

範例 2

題號	#	公因數	最大公因數
1	15	1, 3	$(15, 18) = 3$
	18		
2	16	1, 2	$(16, 22) = 2$
	22		

練習 2

1.請找出以下各小題的公因數及最大公因數：

a. 14, 21 公因數：_____ $(14, 21) =$ _____

b. 9, 24 公因數：_____ $(9, 24) =$ _____

c. 12, 27 公因數：_____ $(12, 27) =$ _____

d. 13, 19 公因數：_____ $(13, 19) =$ _____

2. 草莓班與青蘋果班去美術館參觀，已知草莓班有 18 人，青蘋果班有 12 人，而老師為了提昇兩班的良性互動，所以決定分組活動，而且每組草莓班同學、青蘋果班同學的人數都一樣多，如果希望能使組數盡可能的多，則此次參觀應分成幾組？

二、公倍數與最小公因數

兩整數共同的因數稱為公因數，那兩整數共同的倍數呢？

與公因數相對應，我們稱它為公倍數。

如：6 是 2 的倍數也是 3 倍數，所以我們說 6 是 2 和 3 的公倍數。

觀念一點通：公倍數

若整數 C 是 a, b 兩整數共同的倍數，則稱 C 是 a 和 b 的公倍數。

範例 3

題號	#	倍數	公倍數	解釋
1	5	5, ..., 35, 40, ...	40, ...	40 是 5 和 8 共同的倍數，所以 40 是 5 和 8 的公倍數
	8	8, 16, 24, 32, 40, ...		
2	4	4, 8, ..., 20, 24, ...	24, ...	24 是 4 和 6 共同的倍數，所以 24 是 4 和 6 的公倍數
	6	6, 12, 18, 24, ...		
3	7	7, 14, ..., 49, 54, ...	54, ...	54 是 7 和 9 共同的倍數，所以 54 是 7 和 9 的公倍數
	9	9, 18, ..., 45, 54, ...		

練習 3

1. 請至少寫出 3 個下列小題的公倍數 (至少 3 個)

a. 6, 9 : _____

b. 5, 10 : _____

c. 8, 11 : _____

d. 7, 13 : _____

2. 若 8 加上某數所得的新數會是 8 和 6 的公倍數, 請問某數最小是多少?

3. 小香說:「我的口袋裡有 8 顆彈珠。」小莓說:「我的彈珠比小香多 4 顆。」小青說:「我有的彈珠數是小香和小莓的公倍數」, 請問小青的彈珠最少有多少顆?

我們知道 6 是 2 和 3 的公倍數,

而 $6 \times 2 = 12$ 也是 2 和 3 的公倍數,

把 $6 \times 3 = 18$ 也是 2 和 3 的公倍數,

把 6 乘 4、乘 5...一直下去都是 2 和 3 的公倍數,

如此重複下去, 2 和 3 的公倍數越來越大、也越來越多,

此時, 我們把最小的正公倍數 6 稱作 2 和 3 的最小公倍數。

觀念一點通：最小公倍數

若正整數 D 為 a, b 兩整數的公倍數中最小者, 則稱 D 為 a 和 b 的最小

公倍數, 用中括號記為 $[a, b] = D$ 。

範例 4

題號	#	公倍數	最小公倍數	解釋
1	4	12, 24, 28, ...	$[4, 6] = 12$	因為 12 是 4 和 6 <u>最小</u> 的正公倍數, 所以 12 是 4 和 6 的最小公倍數
	6			
2	7	63, 126, ...	$[7, 9] = 63$	因為 63 是 7 和 9 <u>最小</u> 的正公倍數, 所以 63 是 7 和 9 的最小公倍數
	9			

練習 4

1. 請分別找出下列各小題的最小公倍數：

a. $[5, 7] =$ _____ b. $[12, 18] =$ _____

c. $[6, 9] =$ _____ d. $[10, 25] =$ _____

2. 是非題（正確敘述請打○；錯誤敘述請打 x，如果是錯誤敘述，請在後方寫上理由或舉出反例）

() (1) 若 A, B 為兩相異質數，則 $(A, B) = 1$ 。理由：

() (2) $[A, B]$ 的倍數必為兩整數 A, B 的公倍數。理由：

() (3) $[A, B]$ 必為 (A, B) 的倍數。理由：_____

() (4) 1 必為任兩整數的公因數。理由：_____

三、互質

兩個正整數的公因數常有很多個，現在來考慮一個狀況：

我們知道 3 和 5 的正公因數只有 1，所以 1 剛好也是 3 和 5 的最大公因數，

在這裡的情況下，我們就說 3 和 5 互質。

觀念一點通：互質

若 A, B 兩整數的最大公因數為 1，則稱 A 和 B 互質，

即若 $(A, B) = 1$ ，則 A 和 B 互質，反之亦然。

※**重點提示**：兩相異質數必定互質；兩偶數必定不互質。

範例 5

題號	#	因數	公因數	最大公因數	是否互質
1	8	1, 2, 4, 8	1	1	是
	15	1, 3, 5, 15			
2	21	1, 3, 7, 21	1, 3	3	否
	27	1, 3, 9, 27			
3	17	1, 17	1	1	是
	29	1, 29			

練習 5

1. 請分別找出下列各題的最大公因數，並且判斷是否互質（填上是或否）：

a. $(12, 7) =$ _____ 是否互質： _____

b. $(5, 13) =$ _____ 是否互質： _____

c. $(12, 20) =$ _____ 是否互質： _____

d. $(14, 22) =$ _____ 是否互質： _____

2. 是非題(正確敘述請打 ○;錯誤敘述請打 X, 如果是錯誤敘述, 請在後方寫上理由或舉出反例)

() (1) 兩整數互質, 則兩整數只有一個正公因數。理由:

() (2) 1 與任何整數皆互質。理由: _____

() (3) 兩質數必定互質。理由: _____

() (4) 合數和質數必定不互質。理由: _____

四、由短除法求最大公因數與最小公倍數

在同學理解兩整數的最大公因數與最小公倍數的定義後, 我們接著要學習如何快速找到兩整數的最大公因數與最小公倍。

我們直接看兩個範例:

範例 6

步驟	算式	原理	解釋
1	$\underline{18 \quad 24}$	—	假設我們要找出 $(18, 24)$ 和 $[18, 24]$, 我們把兩個數放入短除符號裡, 兩數之間要有間距以避免搞混
2	$\begin{array}{r} 2 \overline{)18 \quad 24} \\ 9 \quad 12 \end{array}$	$18 = 2 \times 9$ $24 = 2 \times 12$	這時我們使用 18 和 24 的公因數去分解, 這裡用公因數 2 去整除, 所以以先得到 18 和 24 的公因數為 2 注意: 用公因數分解即可, 不必一定需要質因數, 即這裡也可用 6 整除
3	$\begin{array}{r} 2 \overline{)18 \quad 24} \\ 3 \overline{)9 \quad 12} \\ 3 \quad 4 \end{array}$	$18 = 2 \times 9$ $= 2 \times (3 \times 3)$ $24 = 2 \times 12$ $= 2 \times (3 \times 4)$	因為 9 和 12 還可以在找出公因數 3 來分解, 分解之後得到 18 和 24 的公因數為 $2 \times 3 = 6$

步驟	算式	原理	解釋
停止分解	$\begin{array}{r} 2 \overline{) 18 \quad 24} \\ 3 \overline{) 9 \quad 12} \\ 1 \overline{) 3 \quad 4} \\ 3 \quad 4 \end{array}$	-	<p>而分解到這裡，發現 3, 4 已經互質，則可以停止分解，因為如果繼續分解，則 3, 4 的公因數只有 1，所以分解之後還是原本的數，所以短除法分解到兩數互質時，即可停止</p> <p>注意：必須分解到兩數互質才可停止</p>
最大公因數	$\begin{array}{r} 2 \overline{) 18 \quad 24} \\ 3 \overline{) 9 \quad 12} \\ 3 \quad 4 \end{array}$	$2 \times 3 = 6$	<p>將短除式左側的除數乘起來所得的積就是 $(18, 24) = 6$</p>
最小公倍數	$\begin{array}{r} 2 \overline{) 18 \quad 24} \\ 3 \overline{) 9 \quad 12} \\ 34 \end{array}$	$2 \times 3 \times 3 \times 4 = 72$	<p>將短除式左側除數及下方的商數全部乘起來的積就是 $[18, 24] = 72$</p>

範例 7

步驟	算式	原理	解釋
1	$\begin{array}{r} 164 \quad 80 \\ \hline \end{array}$	—	這次要找出 $(18, 24)$ 和 $[18, 24]$ ，一樣把兩個數放入短除符號裡
2	$\begin{array}{r} 4 \overline{) 64 \quad 80} \\ 16 \quad 20 \end{array}$	$64 = 4 \times 16$ $80 = 4 \times 20$	首先直接用 64 和 80 的公因數 4 來當除數，如果同學一時之間無法看出 64 和 80 有公因數是 4，也可從公因數為 2 開始當作除數
3	$\begin{array}{r} 4 \overline{) 64 \quad 80} \\ 4 \overline{) 16 \quad 20} \\ 4 \quad 5 \end{array}$	$64 = 4 \times 16$ $= 4 \times (4 \times 4)$ $80 = 4 \times 20$ $= 4 \times (4 \times 5)$	接著，我們繼續分解 16 和 20，這裡用 16 和 20 的公因數 4 來分解，得到 64 和 80 公因數為 $4 \times 4 = 16$ ，因為商數 4 和 5 已經互質，所以分解到此即可
最大 公因 數	$\begin{array}{r} 4 \overline{) 64 \quad 80} \\ 4 \overline{) 16 \quad 20} \\ 4 \quad 5 \end{array}$	$4 \times 4 = 16$	將短除式左側的除數乘起來所得的積就是 $(18, 24) = 6$
最小 公倍 數	$\begin{array}{r} 4 \overline{) 64 \quad 80} \\ 4 \overline{) 16 \quad 20} \\ 45 \end{array}$	$4 \times 4 \times 4 \times 5$ $= 320$	將短除式左側除數及下方的商數全部乘起來的積就是 $[18, 24] = 320$

練習 6

a.

$$\underline{16 \quad 8}$$

b.

$$\underline{12 \quad 18}$$

c.

$$\underline{7 \quad 13}$$

$$(6, 8) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(12, 18) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(7, 13) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$[6, 8] = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$[12, 18] = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$[7, 13] = \underline{\hspace{2cm}}$$

五、最大公因數及最小公倍數的性質

觀念一點通：若 A, B 為兩整數, 則 A 和 B 的公因數必為 (A, B) 之因數。

如：8 和 12 的公因數：1, 2, 4 皆為 $(8, 12) = 4$ 的因數

觀念一點通：若 A, B 為兩整數, $[A, B]$ 的倍數必為 A, B 兩整數的公倍數。

如： $[8, 12]$ 的兩倍： $24 \times 2 = 48$ 為 8 和 12 的公倍數。

觀念一點通：若 A, B 為兩整數，則 $(A, B) \times [A, B] = A \times B$ 。

$$\text{如：} \underline{(8, 12)} \times [8, 12] = 4 \times 24 = 96 = \underline{8 \times 12}$$

解釋：我們對 A, B 作短除法求得 $(A, B) = c$

則短除式可以表達成右式，且 a, b 互質 $c \mid \underline{A} \quad B$

而從右式，又可得到： $A = c \times a$ ； $B = c \times b$ $a \quad b$

所以，我們可以知道：

$$\begin{aligned} (A, B) \times [A, B] &= c \times (c \times a \times b) \\ &= c \times c \times a \times b = (c \times a) \times (c \times b) = A \times B \end{aligned}$$

觀念一點通：若 A, B 為兩互質整數，則 $[A, B] = A \times B$ 。

即兩互質整數的最小公倍數為兩整數的積

$$\text{如：} [5, 7] = 5 \times 7 = 35 ; [5, 12] = 5 \times 12 = 60$$

解釋：我們已知 $(A, B) \times [A, B] = A \times B$

又因為整數 A, B 互質，所以 $(A, B) = 1$ ，

$$\text{因此，} A \times B = \underline{(A, B)} \times [A, B] = \underline{1} \times [A, B] = [A, B]$$

※重點提示：兩相異質數必互質，所以任兩相異質數的公倍數為兩質數之積。

練習 7

() 1. 右邊是 A 和 B 用短除法分解之後的式子,

$$2 \mid \underline{A \quad B}$$

$$2 \mid \underline{c \quad d}$$

請問下列選項何者為 $A \times B$?

$$5 \mid \underline{e \quad f}$$

(A) $2^2 \times 3 \times 5 \times 7$

$$9 \quad 7$$

(B) $2^4 \times 5^2$

(C) $2^4 \times 3^2 \times 5^2 \times 7$

(D) $2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7$

2. 已知 $(A, B) = 1$; $[A, B] = 20$, 又 $A + B < A \times B$, 請問 $A + B$ 是多少?

六、由標準分解式尋找最大公因數與最小公倍數

其實求最大公因數及最小公倍數時，並不一定只限於用短除法，

若已知兩整數 A 和 B 的標準分解式，

則我們也可以很容易的找出 (A, B) 與 $[A, B]$

直接看例子：

範例

步驟	流程	解釋
列出質因數分解式	$18 = 2 \times 3^2$ $30 = 2 \times 3 \times 5$	假設我們要求出(18,30)和 [18 , 30], 我們先將它們質因數分解, 並化成標準分解式
1. 找最大公因數	$18 = 2 \times 3^2$ $30 = 2 \times 3 \times 5$	找最大公因數時, 需要找 : 1. 兩標準分解式的公因數 2. 公因數相同, 選指數較小的, 所以這裡選 2 和 3, 因此 $(18, 30) = 2 \times 3 = 6$
2. 找最小公倍數	$18 = 2 \times 3^2$ $30 = 2 \times 3 \times 5$	找最小公倍數時, 需要找 : 1. 兩標準分解式所有的乘數 2. 公因數相同, 選指數較大的, 所以這裡選 2 和 3 ² 和 5 因此 $[18, 30] = 2 \times 3^2 \times 5 = 90$

練習 8

1.請分別列出下列各小題的標準分解式, 並由標準分解式判斷最大公

因數及最小公倍數:

a. $6 = 2 \times 3$ $(6, 10) =$ _____

$10 = 2 \times 5$ $[6, 10] =$ _____

b. $12 =$ _____ $(12, 18) =$ _____

$18 =$ _____ $[12, 18] =$ _____

c. $15 =$ _____ $(15, 20) =$ _____

$20 =$ _____ $[15, 20] =$ _____

主題五 重點整理與自我評鑑

請同學逐條複習重點整理，並且依照自己的學習狀態，填滿前方的星星作自我評鑑，三顆星星由少到多分別對應自己的學習成效。

☆☆☆1. **因數與倍數**：若 A, B, C 皆為整數，且 $A \div B = C \cdots 0$ ，則稱
B 是 A 的因數，A 是 B 的倍數。

☆☆☆2. **因數、倍數的性質**：

(1) 1 為任意整數的因數，任意整數也為 1 的倍數。

(2) 任意非 0 整數皆為自己的因數與倍數。

☆☆☆3. **因數判別法**：

(1) 2 的因數判別法：個位數為偶數，即：0, 2, 4, 6, 8。

(2) 3 的因數判別法：每位數字的和為 3 的倍數。

(3) 5 的因數判別法：個位數為 0, 5。

(4) 11 的因數判別法：(奇位數字和)與(偶位數字和)的差為
11 的倍數。

☆☆☆4. **質數**：大於 1 的正整數中，只有兩個正因數（1 與本身）的數。

☆☆☆5. **合數**：大於 1 的正整數中，正因數個數超過兩個(1 與本身)的數。

☆☆☆6. **質數、合數的性質**：

- (1) 質數的正因數只有 1 和自己。
- (2) 正整數中, 1 不是質數也不是合數。
- (3) 所有的偶數中只有 2 是質數, 所有的質數中只有 2 是偶數。

☆☆☆7. **能用埃式篩法尋找某範圍內的質數。**

☆☆☆8. **質因數**：若 a 為質數且為整數 A 的因數, 則稱 a 為 A 的質因數。

☆☆☆9. **質因數分解**：將某正整數分解成其質因數的乘積。

☆☆☆10. **關於質因數、質因數分解的性質**：

- (1) 某整數的質因數必定為某整數的因數。
- (2) 某整數的因數不一定為質因數。
- (3) 1 為任何整數的因數, 但不為任何整數的質因數。
- (4) 某正整數的質因數分解式唯一。

☆☆☆11. **指數記法**：我們將 k 個正整數 a 相乘記成 a^k , 讀作 a 的 k 次方。

☆☆☆12. **標準分解式**：某整數質因數分解後, 其表示式滿足以下條

件：

1. 相異質因數由小至大相乘
2. 相同質因數連乘時用指數記法

☆☆☆13. 能由熟練的用短除法求標準分解式。

☆☆☆14. 公因數：整數 c 是 A, B 兩整數共同的因數，稱 c 是 A 和 B 的公因數。

☆☆☆15. 最大公因數： d 為 A, B 兩整數的公因數中最大者，則稱 d 為 A 和 B 的最大公因數，用小括號記為 $d = (A, B)$ 。

☆☆☆16. 公倍數：整數 C 是 a, b 兩整數共同的倍數，則稱 C 是 a 和 b 的公倍數。

☆☆☆17. 最小公倍數：正整數 D 為 a, b 兩整數的公倍數中最小者，稱 D 為 a 和 b 的最小公倍數，用中括號記為 $D = [A, B]$ 。

☆☆☆18. 公因數、公倍數的性質：

- (1) 1 為任兩個整數的公因數。
- (2) 任意整數的公因數皆為公倍數的因數。
- (3) 任意兩質數只有「1」這個正公因數。

☆☆☆19. 互質：若 $(A, B) = 1$ ，則稱 A 和 B 互質，反之亦然。

☆☆☆20.能由短除法求最大公因數與最小公倍數。

☆☆☆21. 最大公因數與最小公倍數的性質：

- (1) A 、 B 兩整數的公因數必為 (A, B) 之因數。
- (2) $[A, B]$ 的倍數必為 A, B 兩整數的公倍數。
- (3) 若 A, B 為兩整數, 則 $(A, B) \times [A, B] = A \times B$ 。
- (4) 若 A, B 為兩互質整數, 則 $[A, B] = A \times B$ 。
- (5) $[A, B]$ 的倍數必為 A, B 為兩整數的公倍數。

☆☆☆22.能由標準分解式求最大公因數與最小公倍數。

Memo _____

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....