

## 主題四 公因數、公倍數與互質

### 一、公因數與最大公因數

現在，我們來列出 4 和 6 的因數

4 的因數：1, 2, 4

6 的因數：1, 2, 3, 6

同學有發現 4 和 6 都包含因數 1, 2 嗎？

在這樣的情形下，我們稱 1, 2 為 4 和 6 的公因數

#### 觀念一點通：公因數

若整數  $c$  是  $A, B$  兩整數共同的因數，則稱  $c$  是  $A$  和  $B$  的公因數，

如：2 是 4 的因數也是 6 因數，所以我們就說 2 是 4 和 6 的公因數。

## 範例 1

題號	#	# 的因數	公因數	解釋
1	15	1, 3, 5, 15	1, 3	因為 1, 3 是 15 和 18 共同的因數, 所以 1, 3 是 15 和 18 的公因數
	18	1, 2, 3, 6, 9, 18		
2	7	1, 7	1	因為只有 1 是 15 和 18 共同的因數, 所以 15 和 18 的公因數只有 1
	17	1, 17		
3	13	1, 13	1, 13	因為 1, 13 是 13 和 26 共同的因數, 所以 1, 13 是 13 和 26 的公因數
	26	1, 2, 13, 26		

## 練習 1

1. 請找出以下各小題的公因數：

a. 6, 9 : \_\_\_\_\_ b. 12, 24 : \_\_\_\_\_

b. 13, 15 : \_\_\_\_\_ d. 21, 28 : \_\_\_\_\_

2. 若  $A$  為 16 和 32 的正公因數個數,  $B$  為 18 和 26 的正公因數個數, 請問  $A + B$  是多少?

3. 桌上有 15 顆橘子和 20 根香蕉, 已知小明把橘子和香蕉平分到好幾個盤子裡, 且剛好能分完, 請問聰明的你, 桌上共有幾個盤子?

事實上, 兩整數的公因數常常有很多個, 此時, 我們把這些公因數中最大的數命名為最大公因數。

**觀念一點通：最大公因數**

若  $d$  為  $A, B$  兩整數的公因數中最大者, 則稱  $d$  為  $A$  和  $B$  的最大公因數, 用小括號記為  $(A, B) = d$ 。

**範例 2**

題號	#	公因數	最大公因數
1	15	1, 3	$(15, 18) = 3$
	18		
2	16	1, 2	$(16, 22) = 2$
	22		

**練習 2**

1.請找出以下各小題的公因數及最大公因數：

a. 14, 21 公因數：\_\_\_\_\_  $(14, 21) =$  \_\_\_\_\_

b. 9, 24 公因數：\_\_\_\_\_  $(9, 24) =$  \_\_\_\_\_

c. 12, 27 公因數：\_\_\_\_\_  $(12, 27) =$  \_\_\_\_\_

d. 13, 19 公因數：\_\_\_\_\_  $(13, 19) =$  \_\_\_\_\_

2. 草莓班與青蘋果班去美術館參觀，已知草莓班有 18 人，青蘋果班有 12 人，而老師為了提昇兩班的良性互動，所以決定分組活動，而且每組草莓班同學、青蘋果班同學的人數都一樣多，如果希望能使組數盡可能的多，則此次參觀應分成幾組？

### 二、公倍數與最小公因數

兩整數共同的因數稱為公因數，那兩整數共同的倍數呢？

與公因數相對應，我們稱它為公倍數。

如：6 是 2 的倍數也是 3 倍數，所以我們說 6 是 2 和 3 的公倍數。

## 觀念一點通：公倍數

若整數  $C$  是  $a, b$  兩整數共同的倍數，則稱  $C$  是  $a$  和  $b$  的公倍數。

## 範例 3

題號	#	倍數	公倍數	解釋
1	5	5, ..., 35, 40, ...	40, ...	40 是 5 和 8 共同的倍數，所以 40 是 5 和 8 的公倍數
	8	8, 16, 24, 32, 40, ...		
2	4	4, 8, ..., 20, 24, ...	24, ...	24 是 4 和 6 共同的倍數，所以 24 是 4 和 6 的公倍數
	6	6, 12, 18, 24, ...		
3	7	7, 14, ..., 49, 54, ...	54, ...	54 是 7 和 9 共同的倍數，所以 54 是 7 和 9 的公倍數
	9	9, 18, ..., 45, 54, ...		

## 練習 3

1. 請至少寫出 3 個下列小題的公倍數 (至少 3 個)

a. 6, 9 : \_\_\_\_\_

b. 5, 10 : \_\_\_\_\_

c. 8, 11 : \_\_\_\_\_

d. 7, 13 : \_\_\_\_\_

2. 若 8 加上某數所得的新數會是 8 和 6 的公倍數, 請問某數最小是多少?

3. 小香說:「我的口袋裡有 8 顆彈珠。」小莓說:「我的彈珠比小香多 4 顆。」小青說:「我有的彈珠數是小香和小莓的公倍數」, 請問小青的彈珠最少有多少顆?

我們知道 6 是 2 和 3 的公倍數,

而  $6 \times 2 = 12$  也是 2 和 3 的公倍數,

把  $6 \times 3 = 18$  也是 2 和 3 的公倍數,

把 6 乘 4、乘 5...一直下去都是 2 和 3 的公倍數,

如此重複下去, 2 和 3 的公倍數越來越大、也越來越多,

此時, 我們把最小的正公倍數 6 稱作 2 和 3 的最小公倍數。

### 觀念一點通：最小公倍數

若正整數  $D$  為  $a, b$  兩整數的公倍數中最小者, 則稱  $D$  為  $a$  和  $b$  的最小

公倍數, 用中括號記為  $[a, b] = D$ 。

### 範例 4

題號	#	公倍數	最小公倍數	解釋
1	4	12, 24, 28, ...	$[4, 6] = 12$	因為 12 是 4 和 6 <u>最小</u> 的正公倍數, 所以 12 是 4 和 6 的最小公倍數
	6			
2	7	63, 126, ...	$[7, 9] = 63$	因為 63 是 7 和 9 <u>最小</u> 的正公倍數, 所以 63 是 7 和 9 的最小公倍數
	9			



## 練習 4

1. 請分別找出下列各小題的最小公倍數：

a.  $[5, 7] =$  \_\_\_\_\_ b.  $[12, 18] =$  \_\_\_\_\_

c.  $[6, 9] =$  \_\_\_\_\_ d.  $[10, 25] =$  \_\_\_\_\_

2. 是非題（正確敘述請打○；錯誤敘述請打 x，如果是錯誤敘述，請在後方寫上理由或舉出反例）

(     ) (1) 若 A, B 為兩相異質數，則  $(A, B) = 1$ 。理由：

\_\_\_\_\_

(     ) (2)  $[A, B]$  的倍數必為兩整數 A, B 的公倍數。理由：

\_\_\_\_\_

(     ) (3)  $[A, B]$  必為  $(A, B)$  的倍數。理由：\_\_\_\_\_

(     ) (4) 1 必為任兩整數的公因數。理由：\_\_\_\_\_

### 三、互質

兩個正整數的公因數常有很多個，現在來考慮一個狀況：

我們知道 3 和 5 的正公因數只有 1，所以 1 剛好也是 3 和 5 的最大公因數，

在這裡的情況下，我們就說 3 和 5 互質。

#### 觀念一點通：互質

若  $A, B$  兩整數的最大公因數為 1，則稱  $A$  和  $B$  互質，

即若  $(A, B) = 1$ ，則  $A$  和  $B$  互質，反之亦然。

※**重點提示**：兩相異質數必定互質；兩偶數必定不互質。

## 範例 5

題號	#	因數	公因數	最大公因數	是否互質
1	8	1, 2, 4, 8	1	1	是
	15	1, 3, 5, 15			
2	21	1, 3, 7, 21	1, 3	3	否
	27	1, 3, 9, 27			
3	17	1, 17	1	1	是
	29	1, 29			

## 練習 5

1. 請分別找出下列各題的最大公因數，並且判斷是否互質（填上是或否）：

a.  $(12, 7) =$  \_\_\_\_\_ 是否互質： \_\_\_\_\_

b.  $(5, 13) =$  \_\_\_\_\_ 是否互質： \_\_\_\_\_

c.  $(12, 20) =$  \_\_\_\_\_ 是否互質： \_\_\_\_\_

d.  $(14, 22) =$  \_\_\_\_\_ 是否互質： \_\_\_\_\_

2. 是非題(正確敘述請打 ○;錯誤敘述請打 X, 如果是錯誤敘述, 請在後方寫上理由或舉出反例)

(      ) (1) 兩整數互質, 則兩整數只有一個正公因數。理由:

\_\_\_\_\_

(      ) (2) 1 與任何整數皆互質。理由: \_\_\_\_\_

(      ) (3) 兩質數必定互質。理由: \_\_\_\_\_

(      ) (4) 合數和質數必定不互質。理由: \_\_\_\_\_

#### 四、由短除法求最大公因數與最小公倍數

在同學理解兩整數的最大公因數與最小公倍數的定義後, 我們接著要學習如何快速找到兩整數的最大公因數與最小公倍。

我們直接看兩個範例:

## 範例 6

步驟	算式	原理	解釋
1	$\underline{18 \quad 24}$	—	假設我們找出 (18, 24) 和 [18, 24], 我們把兩個數放入短除符號裡, 兩數之間要有間距以避免搞混
2	$\begin{array}{r} 2 \overline{)18 \quad 24} \\ 9 \quad 12 \end{array}$	$18 = 2 \times 9$ $24 = 2 \times 12$	這時我們使用 18 和 24 的公因數去分解, 這裡用公因數 2 去整除, 所以先得到 18 和 24 的公因數為 2 <b>注意:</b> 用公因數分解即可, 不必一定需要質因數, 即這裡也可用 6 整除
3	$\begin{array}{r} 2 \overline{)18 \quad 24} \\ 3 \overline{)9 \quad 12} \\ 3 \quad 4 \end{array}$	$18 = 2 \times 9$ $= 2 \times (3 \times 3)$ $24 = 2 \times 12$ $= 2 \times (3 \times 4)$	因為 9 和 12 還可以在找出公因數 3 來分解, 分解之後得到 18 和 24 的公因數為 $2 \times 3 = 6$

步驟	算式	原理	解釋
停止分解	$\begin{array}{r} 2 \overline{) 18 \quad 24} \\ 3 \overline{) 9 \quad 12} \\ 1 \overline{) 3 \quad 4} \\ 3 \quad 4 \end{array}$	-	<p>而分解到這裡，發現 3, 4 已經互質，則可以停止分解，因為如果繼續分解，則 3, 4 的公因數只有 1，所以分解之後還是原本的數，所以短除法分解到兩數互質時，即可停止</p> <p>注意：必須分解到兩數互質才可停止</p>
最大公因數	$\begin{array}{r} 2 \overline{) 18 \quad 24} \\ 3 \overline{) 9 \quad 12} \\ 3 \quad 4 \end{array}$	$2 \times 3 = 6$	<p>將短除式左側的除數乘起來所得的積就是 <math>(18, 24) = 6</math></p>
最小公倍數	$\begin{array}{r} 2 \overline{) 18 \quad 24} \\ 3 \overline{) 9 \quad 12} \\ 34 \end{array}$	$2 \times 3 \times 3 \times 4 = 72$	<p>將短除式左側除數及下方的商數全部乘起來的積就是 <math>[18, 24] = 72</math></p>

## 範例 7

步驟	算式	原理	解釋
1	$\begin{array}{r} 164 \quad 80 \\ \hline \end{array}$	—	這次要找出 $(18, 24)$ 和 $[18, 24]$ ，一樣把兩個數放入短除符號裡
2	$\begin{array}{r} 4 \overline{) 64 \quad 80} \\ 16 \quad 20 \end{array}$	$64 = 4 \times 16$ $80 = 4 \times 20$	首先直接用 64 和 80 的公因數 4 來當除數，如果同學一時之間無法看出 64 和 80 有公因數是 4，也可從公因數為 2 開始當作除數
3	$\begin{array}{r} 4 \overline{) 64 \quad 80} \\ 4 \overline{) 16 \quad 20} \\ 4 \quad 5 \end{array}$	$64 = 4 \times 16$ $= 4 \times (4 \times 4)$ $80 = 4 \times 20$ $= 4 \times (4 \times 5)$	接著，我們繼續分解 16 和 20，這裡用 16 和 20 的公因數 4 來分解，得到 64 和 80 公因數為 $4 \times 4 = 16$ ，因為商數 4 和 5 已經互質，所以分解到此即可
最大 公因 數	$\begin{array}{r} 4 \overline{) 64 \quad 80} \\ 4 \overline{) 16 \quad 20} \\ 4 \quad 5 \end{array}$	$4 \times 4 = 16$	將短除式左側的除數乘起來所得的積就是 $(18, 24) = 6$
最小 公倍 數	$\begin{array}{r} 4 \overline{) 64 \quad 80} \\ 4 \overline{) 16 \quad 20} \\ 45 \end{array}$	$4 \times 4 \times 4 \times 5$ $= 320$	將短除式左側除數及下方的商數全部乘起來的積就是 $[18, 24] = 320$

## 練習 6

a.

$$\underline{16 \quad 8}$$

b.

$$\underline{12 \quad 18}$$

c.

$$\underline{7 \quad 13}$$

$$(6, 8) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(12, 18) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(7, 13) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$[6, 8] = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$[12, 18] = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$[7, 13] = \underline{\hspace{2cm}}$$

## 五、最大公因數及最小公倍數的性質

**觀念一點通：**若  $A, B$  為兩整數, 則  $A$  和  $B$  的公因數必為  $(A, B)$  之因數。

如：8 和 12 的公因數：1, 2, 4 皆為  $(8, 12) = 4$  的因數

**觀念一點通：**若  $A, B$  為兩整數,  $[A, B]$  的倍數必為  $A, B$  兩整數的公倍數。

如： $[8, 12]$  的兩倍： $24 \times 2 = 48$  為 8 和 12 的公倍數。



**觀念一點通：**若  $A, B$  為兩整數，則  $(A, B) \times [A, B] = A \times B$ 。

$$\text{如：} \underline{(8, 12)} \times [8, 12] = 4 \times 24 = 96 = \underline{8 \times 12}$$

**解釋：**我們對  $A, B$  作短除法求得  $(A, B) = c$

則短除式可以表達成右式，且  $a, b$  互質  $c \mid \begin{array}{l} A \\ B \end{array}$

而從右式，又可得到： $A = c \times a$ ； $B = c \times b$   $\begin{array}{l} a \\ b \end{array}$

所以，我們可以知道：

$$\begin{aligned} (A, B) \times [A, B] &= c \times (c \times a \times b) \\ &= c \times c \times a \times b = (c \times a) \times (c \times b) = A \times B \end{aligned}$$

**觀念一點通：**若  $A, B$  為兩互質整數，則  $[A, B] = A \times B$ 。

即兩互質整數的最小公倍數為兩整數的積

$$\text{如：} [5, 7] = 5 \times 7 = 35 ; [5, 12] = 5 \times 12 = 60$$

**解釋：**我們已知  $(A, B) \times [A, B] = A \times B$

又因為整數  $A, B$  互質，所以  $(A, B) = 1$ ，

$$\text{因此，} A \times B = \underline{(A, B)} \times [A, B] = \underline{1} \times [A, B] = [A, B]$$

**※重點提示：**兩相異質數必互質，所以任兩相異質數的公倍數為兩質數之積。

## 練習 7

( ) 1. 右邊是 A 和 B 用短除法分解之後的式子,

$$2 \mid \underline{A \quad B}$$

$$2 \mid \underline{c \quad d}$$

請問下列選項何者為  $A \times B$  ?

$$5 \mid \underline{e \quad f}$$

(A)  $2^2 \times 3 \times 5 \times 7$

$$9 \quad 7$$

(B)  $2^4 \times 5^2$

(C)  $2^4 \times 3^2 \times 5^2 \times 7$

(D)  $2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7$

2. 已知  $(A, B) = 1$ ;  $[A, B] = 20$ , 又  $A + B < A \times B$ , 請問  $A + B$  是多少?

### 六、由標準分解式尋找最大公因數與最小公倍數

其實求最大公因數及最小公倍數時，並不一定只限於用短除法，

若已知兩整數 A 和 B 的標準分解式，

則我們也可以很容易的找出  $(A, B)$  與  $[A, B]$

直接看例子：

## 範例

步驟	流程	解釋
列出質因數分解式	$18 = 2 \times 3^2$ $30 = 2 \times 3 \times 5$	假設我們要求出(18,30)和 [18, 30], 我們先將它們質因數分解, 並化成標準分解式
1. 找最大公因數	$18 = 2 \times 3^2$ $30 = 2 \times 3 \times 5$	找最大公因數時, 需要找 : 1. 兩標準分解式的公因數 2. 公因數相同, 選指數較小的, 所以這裡選 2 和 3, 因此 $(18, 30) = 2 \times 3 = 6$
2. 找最小公倍數	$18 = 2 \times 3^2$ $30 = 2 \times 3 \times 5$	找最小公倍數時, 需要找 : 1. 兩標準分解式所有的乘數 2. 公因數相同, 選指數較大的, 所以這裡選 2 和 3 <sup>2</sup> 和 5 因此 $[18, 30] = 2 \times 3^2 \times 5 = 90$

## 練習 8

1.請分別列出下列各小題的標準分解式, 並由標準分解式判斷最大公

因數及最小公倍數:

a.  $6 = 2 \times 3$        $(6, 10) = \underline{\hspace{2cm}}$

$10 = 2 \times 5$        $[6, 10] = \underline{\hspace{2cm}}$

b.  $12 = \underline{\hspace{2cm}}$        $(12, 18) = \underline{\hspace{2cm}}$

$18 = \underline{\hspace{2cm}}$        $[12, 18] = \underline{\hspace{2cm}}$

c.  $15 = \underline{\hspace{2cm}}$        $(15, 20) = \underline{\hspace{2cm}}$

$20 = \underline{\hspace{2cm}}$        $[15, 20] = \underline{\hspace{2cm}}$