

主題三 質因數與標準分解式

一、質因數

在了解因數與質數的定義之後，我們來考慮一個情形：

6 的因數有 1, 2, 3, 6，其中 2, 3 是 6 的因數，同時也是質數，我們就稱 2, 3 為 6 的質因數。

觀念一點通：質因數

若整數 A 的某個因數 a 也是質數，則稱 a 為 A 的質因數，

如：10 的因數 5 同時也是質數，所以 5 是 10 的質因數。

範例 1

#	# 的因數	# 的質因數
10	1, 2, 5, 10	2, 5
11	1, 11	11
12	1, 2, 3, 4, 6, 12	2, 3
13	1, 13	13
14	1, 2, 7, 14	2, 7

15	1, 3, 5, 15	3, 5
----	-------------	------

練習 1

1. 請分別列出以下數字的所有因數與質因數:

a. 1 因數：_____ 質因數：_____

b. 9 因數：_____ 質因數：_____

c. 23 因數：_____ 質因數：_____

d. 27 因數：_____ 質因數：_____

e. 31 因數：_____ 質因數：_____

2. 已知 28, 49, 56 這三個數有一個共同的質因數, 請把它找出來。

3. 若某個質數的質因數是一個偶數, 請想想看, 這個質數是多少?

4. 是非題（正確敘述請打○；錯誤敘述請打 x，如果是錯誤敘述，請在後方寫上理由或舉出反例）

() (1) 所有的質數都剛好有一個質因數。理由：

() (2) 所有整數都有質因數。理由：_____

() (3) 任意整數的質因數都是該整數的因數。理由：

() (4) 某整數的因數個數可能少於其質因數個數。理由：

() (5) 有可能某整數的因數全都是質因數。理由：

二、質因數分解與標準分解式

我們知道 20 的因數有 1, 2, 4, 5, 10, 20,

回想一下因數的定義：整數 A 可以被整數 B 整除，則稱 B 是 A 的因數，

所以我們得到：

$$20 \div 1 = 20 \cdots 0 \qquad 20 = 1 \times 20$$

$$20 \div 2 = 10 \cdots 0 \qquad 20 = 2 \times 10$$

$$20 \div 4 = 5 \cdots 0 \quad \text{而左式能寫成} \quad 20 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$20 \div 5 = 4 \cdots 0 \qquad 20 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$20 \div 10 = 2 \cdots 0 \qquad 20 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$20 \div 20 = 1 \cdots 0 \qquad 20 = \underline{\hspace{2cm}}$$

因此，我們可以把 20 分解成其因數的乘積： $20 = 1 \times 20 = 2 \times 10 = 4 \times 5$

同樣地，請同學試著將 30 寫成兩種其因數的乘積，30：_____，

_____而由 20 與 30 的分解，我們可以知道每個正整數似乎都可

以寫成許多種其因數的乘積，所以，我們很自然的便會思考：所有正

整數是否存在唯一的一種分解形式，方便我們探討其性質？

這時，我們就要利用到質因數分解來表示任意正整數。

觀念一點通：質因數分解

將某正整數分解成其質因數的乘積，則此過程稱為質因數分解，

如： $20 = 4 \times 5 = \underline{2 \times 2 \times 5}$ (2 和 5 為 20 的質因數)

觀念一點通：為什麼 20 的質因數分解不能寫成 $1 \times 2 \times 2 \times 5$ ？

答案：因為 1 不是質數，所以根據質因數分解的定義，20 不寫成 $1 \times 2 \times 2 \times 5$ 。

事實上，這個問題在某個角度上，也解釋了為什麼質數的定義中要有大於 1 的限制，如果考慮把 1 歸類成質數，則任何正整數的質因數分解便不唯一了！

如： $20 = \underline{1} \times 2 \times 2 \times 5 = \underline{1 \times 1} \times 2 \times 2 \times 5 = 1 = \underline{1 \times 1 \times 1} \times 2 \times 2 \times 5 = \dots$

範例 2

#	#的因數	# = 其因數的乘積	#的質因數	質因數分解
10	1, 2, 5, 10	$1 \times 10 = 2 \times 5$	2, 5	2×5
11	1, 11	1×11	11	11
12	1, 2, 3, 4, 6, 12	$1 \times 12 = 2 \times 6 = 3 \times 4$	2, 3	$2 \times 2 \times 3$
13	1, 13	1×13	13	13
14	1, 2, 7, 14	$1 \times 14 = 2 \times 7$	2, 7	2×7

練習 2

() 1. 請問下列何者為 32 的質因數分解？

- (A) 2×16 (B) $1 \times 4 \times 8$ (C) $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ (D) $1 \times$

32

2. 下列為某些正整數其因數的乘積，請分別改寫成質因數分解形

式：

a. $2 \times 4 =$ _____ b. $1 \times 5 \times 12 =$ _____

c. $3 \times 4 \times 6 =$ _____ d. $1 \times 18 =$ _____

到這裡，正整數的質因數分解表示法雖然唯一了，但它的寫法仍然不夠精簡

所以我們要引入標準分解式，在此之前，我們先介紹指數記法的概念。

因為我們知道 $2 \times 2 \times 2$ ，代表 3 個 2 相乘，因此我們就可以把 $2 \times 2 \times 2$ 記成 2^3 ，而這種形式就稱為指數記法。

觀念一點通：指數記法

我們將 k 個正整數 a 相乘記成 a^k ，讀作 a 的 k 次方；注意： k 標在 a 的右上方，如： $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4$ ，意義：4 個 2 相乘為 2 的 4 次方。

※**重點提示**：當 $k=0$ 時，一律規定為 1，如： $2^0 = 1$ ； $7^0 = 1$ ； $10^0 = 1$

當 $k=1$ 時，我們通常會把 1 次方省略，如： $2^1 = 2$

練習 3

1. $7 \times 7 \times 7 = (\quad)$ ，意義：_____

2. $5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = (\quad)$ ，意義：_____

3. $19 \times 19 \times 19 = (\quad)$ ，意義：_____

觀念一點通：標準分解式

將某正整數質因數分解寫成以下形式，稱為此正整數的標準分解式：

1. 質因數由左至右相乘時，需由小到大。
2. 相同質因數連乘時，需表示成次方或指數記法。

如 20 的標準分解式： $20 = \underset{\text{質因數分解}}{2 \times 2 \times 5} = \underset{\text{標準分解式}}{2^2 \times 5}$

範例 3

#	質因數分解	標準分解式
10	2×5	2×5
11	11	11
12	$\underline{2} \times \underline{2} \times 3$	$\underline{2}^2 \times 3$
13	13	13
14	2×7	2×7
15	3×5	3×5

練習 4

請將下列質因數分解的表示式分別改寫成標準分解式：

$$1. 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$2. 7 \times 7 \times 2 \times 3 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$3. 5 \times 3 \times 2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$4. 5 \times 7 \times 11 \times 7 \times 5 = \underline{\hspace{2cm}}$$

標準分解式的條件：

1. 相異質因數由小至大相乘
2. 相同質因數連乘用指數型式

三、由短除法求標準分解式

在同學有了質因數分解及標準分解式的初步概念之後，

我們現在需要思考的便是：如何快速的寫出一個正整數的標準分解式？

在這裡，我們要引入短除法這個技巧。

我們先直接觀察一個例子：

範例 4

步驟	算式	原理	解釋
1	$24 \cdots \underline{124}$	—	<p>假設我們要找出 24 的標準分解式，則我們先寫上 24，並且畫上短除記號，短除記號有點像上下顛倒的除法符號</p>
2	$\begin{array}{r} 2 \cdots \underline{2 24} \\ 12 \cdots \underline{12} \end{array}$	$24 = 2 \times 12$	<p>由於標準分解式是由質因數分解而來，所以我們需要將 24 寫成其質因數的乘積，而 24 的質因數有 2, 3，我們先由 2 開始分解，24 可以分解成 2×12（標灰色的數），因為 12 不是 24 的質因數，所以我們要繼續分解 12</p> <p>注意：列在最左邊的數字是方便讓同學觀察，正式計算短除式時不必寫出</p>

步驟	算式	原理	解釋
3	$\begin{array}{r} 2 \cdots 2 \overline{)24} \\ 2 \cdots 2 \overline{)12} \\ 6 \cdots 6 \end{array}$	$\begin{aligned} 24 &= 2 \times 12 \\ &= 2 \times (2 \times 6) \end{aligned}$	<p>同第二步驟，我們要分解 12，一樣用 24 的質因數 2 整除，所以 12 可以分解成 2×6，到這裡，我們已經明顯可以發現 24 已被分解成 $2 \times 2 \times 6$，但因為 6 仍不是 24 的質因數，所以我們還要繼續分解 6</p>
4	$\begin{array}{r} 2 \cdots 2 \overline{)24} \\ 2 \cdots 2 \overline{)12} \\ 2 \cdots 2 \overline{)6} \\ 3 \cdots 3 \end{array}$	$\begin{aligned} 24 &= 2 \times 12 \\ &= 2 \times 2 \times 6 \\ &= 2 \times 2 \times (2 \times 3) \end{aligned}$	<p>因為 6 可再被 2 整除，所以我們再繼續分解，得到 $6 = 2 \times 3$，到這裡，我們已經分解到全部都是 24 的質因數相乘了，即 $24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$，也就是說，我們已經完成 24 的質因數分解</p>

步驟	算式	原理	解釋
5	$\begin{array}{l} 2 \cdots 2 \mid 24 \\ 2 \cdots 2 \mid 12 \\ 2 \cdots 2 \mid 6 \\ 3 \cdots 3 \end{array}$	$\begin{aligned} 24 \\ &= \underline{2 \times 2 \times 2} \\ &\times 3 \\ &= \underline{2^3} \times 3 \end{aligned}$	<p>我們已經得到 24 的質因數分解式：$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$，而我們還要進一步化成標準分解式，還記得標準分解式的兩個條件嗎？</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 質因數由小乘到大 2. 用指數記法表達相同質因數連乘。 <p>所以 24 的標準分解式就是：$2^3 \times 3$，同學瞭解了嗎？</p>

練習 5

1.請觀察下列的短除式，並分別直接寫下其標準分解式：

a.

$$2 \mid 28$$

$$2 \mid 14$$

$$7$$

b.

$$2 \mid 48$$

$$2 \mid 24$$

$$2 \mid 12$$

$$2 \mid 6$$

$$3$$

c.若把短除記號裡的數全遮起來，

請嘗試找出此數的標準分解式。

$$2 \mid \blacksquare$$

$$2 \mid \blacksquare$$

$$2 \mid \blacksquare$$

$$5 \mid \blacksquare$$

$$3$$

標準分解式：_____ 標準分解式：_____ 標準分解式：_____

2.請用短除法分別計算出下列數字的標準分解式:

a.

$$\underline{125}$$

b.

$$\underline{154}$$

c.

$$\underline{170}$$

標準分解式：_____ 標準分解式：_____ 標準分解式：_____

3. 老師的筆記本上原本寫了某數的短除法計算過程及其標準分解式,

但粗心的老師不小心打翻油墨, 以至於現在筆記本中只依稀看的清楚部分算式, 如下圖, 請聰明的你協助老師找回某數以及它的標準分解式。

短除式:

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) \blacksquare} \\ \blacksquare \underline{) 2 \blacksquare} \\ 2 \overline{) 1 \blacksquare} \\ \blacksquare \overline{) 3 \blacksquare} \\ 3 \overline{) \blacksquare} \end{array}$$

標準分解式:

$$\blacksquare = 2^{\blacksquare} \times \blacksquare^2 \times \blacksquare$$

7