

主題二 質數與合數

一、質數與合數

一星期 7 天中有 2 天是假日，棋盤網格一排是 19 格，五元硬幣上有數字 5，吃到飽便宜一點要 199 元，以上的 7, 2, 19, 5, 199 都是質數。

其實只要同學細心觀察，就會發現其實我們生活中到處充滿著質數，質數究竟是什麼呢？

我們先來回想質數的意義：

觀念一點通：質數

大於 1 的正整數(自然數)中，只能被 1 與本身整除的數，

我們也可以理解成：大於 1 的正整數中，只有兩個正因數（即 1 與本身）的數。

範例 1

#	#的因數	因數個數	歸類與理由	圖示
1	1	1 個	1 不大於 1 且只有一個因數， 所以 1 <u>不是</u> 質數	■
2	1, 2	2 個	2 只有 1, 2 這兩個因數， 所以 2 是質數	■■
3	1, 3	2 個	3 只有 1, 3 這兩個因數， 所以 3 是質數	■■■ ■■ ■■
4	1, 2, 4	3 個	4 有 1, 2, 4 共三個因數， 所以 4 <u>不是</u> 質數	■■■■
5	1, 5	2 個	5 只有 1, 5 這兩個因數， 所以 5 是質數	■■■■■ ■■■ ■■■
6	1, 2, 3, 6	4 個	6 有 1, 2, 3, 6 共四個因數， 所以 6 <u>不是</u> 質數	■■■■■■

#	#的因數	因數個數	歸類與理由	圖示
7	1, 7	2 個	7 只有 1, 7 這兩個因數, 所以 7 是質數	■■■■■■■
8	1, 2, 4, 8	4 個	8 有 1, 2, 4, 8 共四個因數, 所以 8 <u>不是</u> 質數	■■■■ ■■■■ ■■■■■■■
9	1, 3, 9	3 個	9 有 1, 3, 9 共三個因數, 所 以 9 <u>不是</u> 質數	■■■ ■■■ ■■■■■■■
10	1, 2, 5, 10	4 個	10 有 1, 2, 5, 10 共四個因 數, 所以 10 <u>不是</u> 質數	■■■■■■■ ■■ ■■ ■■ ■■

數學溝通橋 1

1. 兩人一組，依序用自己的想法向對方解釋質數的意義。
2. 請共同找出數字 1 到 20 中所有的質數，並解釋理由。
3. 請小組討論例中圖示與質數的關係。
4. 請班上每個同學選擇一個 50 以內的數，然後請選到質數的同學舉手。

根據質數的定義及上方數學溝通橋 1，我們可以知道有許多的正整數並非質數，這時候我們可以把這些除了 1 與本身之外，還可以被其他正整數整除的數稱為成合數。

觀念一點通：合數

大於 1 的正整數中，除了 1 與本身之外，還能被其他自然數整除的數，我們也能理解成：大於 1 的正整數中，正因數個數超過兩個（1 與本身）的數。

數學溝通橋 2

1. 根據合數的意義,討論 1 ~ 10 的 10 個數, 並找出合數。
2. 請小組共同找出數字 1 到 20 中所有的合數, 並解釋理由。
3. 請問 1 是質數還是合數。
4. 請小組討論所有的自然數中, 是否不是質數就是合數。

練習 1

1. 請辨別 0, 1, 13, 18, 21, 5, 29, 47 這些數字是質數還是合數, 或兩者都不是 (提示:可以試試因數判別法)

質數：_____

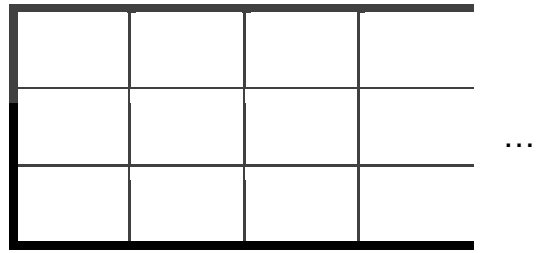
合數：_____

兩者都不是：_____

2. 右圖為某月份的日曆, 請將各週中日期是質數的圈出來, 並回答第幾週有最多的日期是質數?

	日	一	二	三	四	五	六
第一週	1	2	3	4	5	6	7
第二週	8	9	10	11	12	13	14
第三週	15	16	17	18	19	20	21
第四週	22	23	24	25	26	27	28
第五週	29	30	31				

3. 有一個長方形的大盒子如右圖，盒子是由大小一樣的小格子排列而成，但不知到它總共有多少格子，若有一台機器在每個格子中各放置一塊蛋糕，請問當機器把整個盒子裝滿後，這個大盒子中的蛋糕數目是否為質數？為什麼？



- 4.是非題（正確敘述請打 ○；錯誤敘述請打 X，如果是錯誤敘述，請在後方寫上理由或舉出反例）

- () (1)任何一個正整數，若不是質數就是合數。
- () (2)1 是奇數中唯一不是質數的數。
- () (3)2 是偶數中唯一的質數。
- () (4)所有質數的正因數都只有兩個，即 1 和自己。
- () (5)兩質數相乘得到的積也是質數。

二、埃拉托賽尼篩選法 (the Sieve of Eratosthenes, 以下簡稱埃氏篩法)

在了解質數的意義後，我們接著要來介紹埃氏篩法，因為它能幫助我們順利地找出某範圍內的質數。

埃氏篩法是一種用已知質數尋找其他質數的方法，它的基本想法就好比用篩子把質數的倍數層層過濾，如此一來，剩下的質數也會一一現形。

直接舉個例子，我們試著用篩選的想法來找出 20 以內的質數。

範例 2

步驟	說明	得到質數	流程圖																			
一	我們已知 1 不是質數，所以先去掉 1 (把 1 劃掉)	無	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
二	因為 2 是質數，所以我們把 2 圈起來；接著，我們把 2 的倍數中大於 2 的數 (如：4, 6, 8, ...) 通	2	1	②	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
三	因為 3 不是 2 的倍數，所以沒被劃掉，代表 2 不是 3 的因數，所以 3 是質數；接著把 3 圈起來，並	3	1	②	③	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

四	因為 4 已被劃掉, 即不是質數, 所以直接考慮 5, 因為 5 沒被劃掉, 代表 2, 3, 4 皆不是 5 的因數,	5	1	②	③	4-	⑤
			6	7	8	9	10
			11	12	13	14	15
			16	17	18	19	20
五	接著之後, 皆以此類推, 當遇到沒被劃掉的數, 那個數就是質數, 我們把它圈起來, 並劃掉它的倍		1	②	③	4-	⑤
			6	⑦	8	9	10
			11	12	13	14	15
			16	17	18	19	20

希望同學能從上面的例子中, 感受到埃氏篩法由已知質數搜尋未知質數的篩選精神。**觀念一點通**：以下為埃氏篩法的正式作法：

當我們要找出某 1 到某正整數 N 中的質數時,

步驟 1：因為 1 不是質數, 我們先把 1 刪掉

步驟 2：因為 2 沒被篩掉, 所以把 2 留下並圈起來, 再篩掉 2 的倍數,

步驟 3：因為 3 沒被篩掉, 所以把 3 留下並圈起來, 再篩掉 3 的倍數,

步驟 4：因為 4 已經被篩掉(4 是 2 的倍數, 不是質數), 所以跳過 4,

步驟 5：因為 5 沒被篩掉, 所以把 5 留下並圈起來, 再篩掉 5 的倍數,

步驟 6：因為 6 已經被篩掉(6 是 2, 3 的倍數, 不是質數), 所以跳過 6, …

步驟 N：以此類推, 直到篩選到正整數 N,

最後, 所有被圈起來的數就是 1 到 N 中的質數。

※重點提示：已被劃掉的數字, 即不是質數, 所以可以省略檢驗的程序。

範例 3

我們用埃氏篩法的正式作法來找出 1 到 10 中的質數。(省略檢驗被劃掉的數)

步驟	說明	動作
1	因為 1 不是質數, 所以先劃掉 1	1 , 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10
2	2 沒被劃掉, 所以圈起 2, 劃掉 2 的倍數	1 , ②, 3, 4 , 5, 6 , 7, 8, 9, 10
3	3 沒被劃掉, 所以圈起 3, 劃掉 3 的倍數	1 , ②, ③, 4 , 5, 6 , 7, 8, 9, 10
4	5 沒被劃掉, 所以圈起 5, 劃掉 5 的倍數	1 , ②, ③, 4 , 5, 6 , 7, 8, 9, 10
5	7 沒被劃掉, 所以圈起 7, 劃掉 7 的倍數	1 , ②, ③, 4 , ⑤, 6 , ⑦, 8, 9, 10
結果	所以 2, 3, 5, 7 就是 1 到 10 中的質數	②, ③, ⑤, ⑦

到這裡, 同學是不是能夠了解埃氏篩法的原理及意義了呢?

數學溝通橋 3

請兩人一組，用埃氏篩法協力圈找出 100 以內的質數。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100