

單元三 指數與科學記號

主題一 指數

一、何謂指數

1.乘方的意義

『”指數”這個名詞聽起來很新潮，感覺像一個新的數，到底指數是用來做什麼用的呢？讓我們來看個小漫畫！』

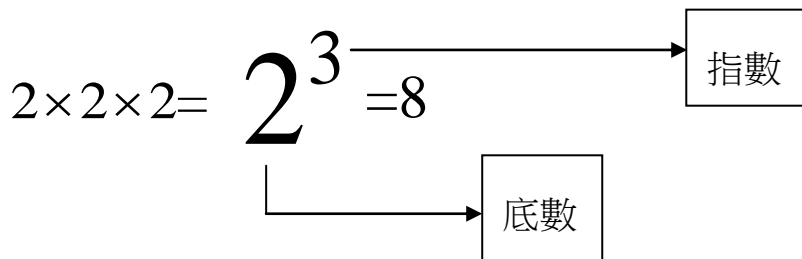


2.乘方的簡記

『何謂指數？指數的用途又是什麼？現在就讓我們來認識指數這個新朋友吧！』

觀念一點通

1. ”指數”用來幫助我們簡化同”底數”相乘的計算，記在數的”右上角”。
2. 如下例，3個2相乘，讀作”2的3次方”，記為” 2^3 ”，而 $2^3 = 2 \times 2 \times 2$ ，其值為8。
3. 2^3 表示”2這個數自己乘自己乘了3次”。



練習 1：將下列各題次方寫出來並計算出值：

(1) $5 \times 5 \times 5 = 5^{(\quad)} = (\quad)$

唸作：()的()次方

(2) $7 \times 7 = 7^{(\quad)} = (\quad)$

唸作：()的()次方

(3) $4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^{(\quad)} = (\quad)$

唸作：()的()次方

練習 2：計算出下列各題：

(1) $2^5 = (\quad)$

(2) $6^3=(\quad)$

(3) $3^4=(\quad)$

動動腦 如何計算 $(\frac{2}{3})^4$

『月黑風高殺人夜，單純的整數已不是我們的對手』

『現在，挑戰者出現了，分數與小數。』

在動動腦中，我們知道：

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2}{3 \times 3 \times 3 \times 3} = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}$$

4 個 $\frac{2}{3}$ 相乘

分數相乘，分子乘
分子、分母乘分母

重點提示：

$(\frac{2}{3})^4$ 代表 $\frac{2}{3}$ 自己乘自己 4 次，再利用分數乘法性質，得知結果。

練習 3：計算下列各題：

(1) $(\frac{3}{4})^3=(\quad)$

(2) $(\frac{2}{5})^2=(\quad)$

觀念一點通：

1. 自己乘自己，不管乘了多少個，都可以用指數很簡單的表示出來
2. 分數的次方，可以使用分數乘法的性質來計算

二、負數與指數

1. 負數的次方計算

『上面我們學會了指數如何計算，但是回想之前我們剛學過的”負數”，如果是一個負數的次方，那要如何計算呢？讓我們繼續看下去！』

$$(-3)^5 = \underbrace{(-3) \times (-3)}_{\text{負負得正}} \times \underbrace{(-3) \times (-3)}_{\text{負負得正}} \times (-3) = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times (-3) = -243$$

↓

孤獨的負數

$$(-3)^4 = \underbrace{(-3) \times (-3)}_{\text{負負得正}} \times \underbrace{(-3) \times (-3)}_{\text{負負得正}} = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$$

觀念一點通

1. 在計算負數的次方時，須完成一連串的負負得正
2. 當做完一連串的負負得正時，若存在”孤獨的負數”，則算出之值為負。也就是說：偶數個負數相乘，其值為正，奇數個負數相乘，其值為負。

練習 4：計算出下列各式之值。

- | | |
|--------------------------|--------------------------|
| (1) $(-3)^3 = (\quad)$ | (4) $(-2)^2 = (\quad)$ |
| (2) $(-5)^3 = (\quad)$ | (5) $(-4)^2 = (\quad)$ |
| (3) $(-7)^3 = (\quad)$ | (6) $(-6)^2 = (\quad)$ |

練習 5：判斷下列各小題為正數或負數：

- (1) $(-4)^{101}$ 為()數 (3) $(-3)^{10100}$ 為()數
 (2) $(-7)^{98}$ 為()數 (4) $(-2)^{197}$ 為()數

動動腦：

想想看 $(-2)^4$ 與 -2^4 『算出來的結果是否相等？』

$$(-2)^4 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$$

$$-2^4 = -(2^4) = -(2 \times 2 \times 2 \times 2) = -16$$

└─→ 指數先運算再加負號

『由上面運算結果， $(-2)^4$ 與 -2^4 算出來的值不一樣，會差一個負號，想想看如果奇數次方，算出來會是怎樣的結果？』

練習 6：計算下列各式之值

- (1) $(-3)^2 = (\quad)$
 (2) $-3^2 = (\quad)$

觀念一點通

- 負數的次方需要做一連串的負負得正，觀察是否擁有**孤獨的負數**，決定值為正為負。
- 我們發現：一個負數的**奇次方**，必具有**孤獨的負數**，為**負數**
偶次方，不具有落單的負數，為**正數**

三、指數律

1. 指數律

『指數在計算上，有一些規則可循，於是產生了指數四大金剛，也就是所謂的指數律。指數律能夠幫助我們解決任何指數計算問題！』

觀念一點通

1. 同底數相乘，指數相加：

$$3^4 \times 3^3 = 3^{4+3} = 3^7$$

2. 同底數相除，指數相減：

$$3^5 \div 3^2 = 3^{5-2} = 3^3$$

3. 同指數相乘，底數相乘：

$$3^5 \times 2^5 = (3 \times 2)^5 = 6^5$$

4. 同指數相除，底數相除：

$$8^4 \div 2^4 = (8 \div 2)^4 = 4^4$$

練習 7：填填看

(1) $2^4 \times 2^5 = 2^{(\quad)}$

(2) $6^7 \div 6^3 = 6^{(\quad)}$

(3) $3^5 \times 3^3 = 3^{(\quad)}$

(4) $9^7 \div 9^6 = 9^{(\quad)}$

(5) $4^3 \times 2^3 = (\quad)^3$

(6) $8^7 \div 4^7 = (\quad)^7$

(7) $2^6 \times 5^6 = (\quad)^6$

(8) $100^8 \div 10^8 = (\quad)^8$

動動腦

想想看 $(3^2)^4$ 與 $(3^4)^2$ 它們的結果是否相等？

$$(3^2)^4 = 3^2 \times 3^2 \times 3^2 \times 3^2 = 3^{2+2+2+2} = 3^8$$

指數律” 同底相乘，指數相加”

$$(3^4)^2 = 3^4 \times 3^4 = 3^{4+4} = 3^8$$

指數律” 同底相乘，指數相加”

由上面的結果我們知道 $(3^2)^4 = (3^4)^2$ ，想想看，是否換個底數以後也是如此呢？

練習 8：請先寫出各小題的指數型式，並判斷各小題的兩個答案是否相同，然後在□中打✓

$$(1) \begin{cases} (3^4)^2 \\ (4^2)^3 = 4^{(\quad)} \end{cases}$$

結果： 相同 不相同

$$(2) \begin{cases} (4^5)^2 \\ (5^2)^4 = 5^{(\quad)} \end{cases}$$

結果： 相同 不相同

由前面的練習可知道

$$(3^2)^4 = 3^{2+2+2+2}$$

$$(3^4)^2 = 3^{4+4}$$

因此 $(3^2)^4 = 3^{2 \times 4} = 3^8$

$$(3^4)^2 = 3^{4 \times 2} = 3^8$$

這兩個數運算出來的結果會一樣。

練習 9：填填看

(1) $(2^2)^3 = 2^{(\quad)}$

(2) $(4^3)^2 = 4^{(\quad)}$

動動腦 利用指數律計算 $3^3 \div 3^3$ ，並觀察其結果
由指數律”同底相除，指數相減”得知

$$3^3 \div 3^3 = 3^{3-3} = 3^0$$

然而 $3^3 \div 3^3 = 27 \div 27 = 1$

於是得知 $3^0 = 1$

其實不為零的數的 0 次方皆為 1，

即 $a^0 = 1$ ， a 為不為零的數

觀念一點通

1. $(3^4)^2$ ，這類指數乘指數的計算，即把”指數相乘”，為 $3^{4 \times 2}$ 。
2. 由乘法交換律知道， $3^{4 \times 2} = 3^{2 \times 4}$ ，於是 $(3^4)^2 = (3^2)^4$ 。
3. $(3^4)^2 = 3^{4 \times 2}$ 這也是指數律。
4. 指數的指數：可利用”指數相乘”的方法運算
5. 不為零的數的 0 次方皆為 1，即 $a^0 = 1$ ， a 為不為零的數

2.指數律計算

『學會了指數律四大金剛，接下來就是利用這些指數律來幫助我們解決指數運算了！』

範例 1

$$\begin{aligned} 2^3 \times 2^2 \times 2^4 &= (2^3 \times 2^2) \times 2^4 \\ &= 2^{3+2} \times 2^4 \\ &= 2^5 \times 2^4 \\ &= 2^{5+4} = 2^9 \end{aligned}$$

範例 2

$$\begin{aligned} 3^4 \times 3^3 \div 3^2 &= (3^4 \times 3^3) \div 3^2 \\ &= 3^{4+3} \div 3^2 \\ &= 3^7 \div 3^2 \\ &= 3^{7-2} = 3^5 \end{aligned}$$

範例 3

$$\begin{aligned} 4^6 \div 4^4 \times 4^2 &= (4^6 \div 4^4) \times 4^2 \\ &= 4^{6-4} \times 4^2 \\ &= 4^2 \times 4^2 \\ &= 4^{2+2} = 4^4 \end{aligned}$$

範例 4

$$\begin{aligned} 5^6 \div 5^3 \div 5^2 &= (5^6 \div 5^3) \div 5^2 \\ &= 5^{6-3} \div 5^2 \\ &= 5^3 \div 5^2 \\ &= 5^{3-2} = 5^1 \end{aligned}$$

重點提示：以上範例的技巧，先計算前兩個數，算出結果以後再跟後面的數做運算，每次計算的時候都會用到指數律。

練習 10：將以下各題空格填入正確的數。

- (1) $3^3 \times 3^2 \times 3^4 = 3^{()}$
- (2) $2^8 \div 2^3 \times 2^2 = 2^{()}$
- (3) $5^8 \div 5^3 \div 5^2 = 5^{()}$
- (4) $6^3 \times 6^4 \div 6^2 = 6^{()}$

牛刀小試 1 在下列空格中填入正確的答案

(1) $2^3 = (\quad)$

(2) $(-3)^3 = (\quad)$

(3) $(-5)^{103}$ 為()數 (填入“正”或“負”)

(4) $-4^2 = (\quad)$

(5) $3^2 \times 3^3 = 3^{(\quad)}$

(6) $9^8 \div 9^5 = 9^{(\quad)}$

(7) $2^3 \times 5^3 = (\quad)^3$

(8) $(4^3)^2 = 4^{(\quad)}$

(9) $2^6 \div 2^3 \times 2^2 = (\quad)$

(10) $6^3 \times 6^5 \div 6^2 = (\quad)$

主題二 科學記號

一、何謂科學記號

1.科學記號的意義

老師：各位同學，老師今天要請問大家一個問題，地球離太陽多少公里？

同學 A：地球跟太陽的距離喔，那一定有 10000 公里這麼多吧？

同學 B：不，可能有 10000000 公里那麼多！

老師：同學都猜得很不錯喔，但基本上地球離太陽的距離有 150000000 公里這麼多喔，可是這個值這麼多位數，我們為了使它變短好記，把 150000000 簡記為 1.5×10^8 公里。

同學 C：老師， 1.5×10^8 是什麼啊？

老師： 1.5×10^8 這個就是傳說中的”科學記號”簡記法！

2.科學記號的簡記

(1) 以 10 的次方表示數

『簡記的方法和我們學過的指數有很大的關係，讓我們先從 10 的次方開始練習吧！』

範例 1 簡記 10000000

$$10000000 = \overbrace{10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10}^{10000000 \text{ 相當於 } 7 \text{ 個 } 10 \text{ 相乘}} \\ = 10^7$$

範例 2 簡記 0.000001

$$0.000001 = \frac{1}{1000000} \\ = \frac{1}{\overbrace{10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10}^{1000000 \text{ 相當於 } 6 \text{ 個 } 10 \text{ 相乘}}} \\ = \frac{1}{10^6} \\ = 10^{-6}$$

練習 1：完成下列的空格

(1) $10000 = 10^{(\quad)}$

(2) $100000000 = 10^{(\quad)}$

(3) $0.001 = 10^{(\quad)}$

(4) $0.00000001 = 10^{(\quad)}$

『學會了如何簡記 10 的次方，接著是我們的重頭戲：科學記號。科學記號的簡記法為：將一數簡記成 $a \times 10^b$ 的形式，其中 $1 \leq a < 10$ ， b 為整數』

(2) 用科學記號表示很大的數

範例 3 將 230000 表示成科學記號

思考：為了將 230000 簡記成 $a \times 10^b$ 的形式，我們必須找出一個 a ，使這個大於或等於 1 而且比 10 小。

我們觀察發現 230000 可以寫成 2.3×100000

$$230000 = 2.3 \times 100000$$

簡記

$$= 2.3 \times 10^5$$

於是我們將 230000 表示成 2.3×10^5 這個科學記號

練習 2：將下列各數表示成科學記號

(1) 450000

(2) 56000

(3) 12000

(4) 73000000

動動腦 1375000 如何化成科學記號？

觀察發現 1375000 可以寫成 1.375×1000000

因此將 1000000 簡記成 10^6

於是 $1375000000 = 1.375 \times 10^6$ 為其科學記號

練習 3：將下列各數表示成科學記號

- (1) 173400
- (2) 2543800
- (3) 18340

(4) 用科學記號表示很小的數

範例 4 將 0.0024 表示成科學記號

思考：為了將 0.0024 簡記成 $a \times 10^b$ 的形式，我們必須找出一個 a ，使這個 a 比 0 大而且比 10 小。

我們觀察發現 0.0024 可以寫成 2.4×0.001

$$\begin{aligned} 0.0024 &= 2.4 \times 0.001 \\ &\quad \swarrow \text{簡記} \\ &= 2.4 \times 10^{-3} \end{aligned}$$

於是我們將 0.0024 用科學記號表示成 2.4×10^{-3} 這個科學記號

練習 4：將下列各數表示成科學記號

- (1) 0.045
- (2) 0.0031
- (3) 0.00067
- (4) 0.000038

觀念一點通

1. 科學記號的意義：當一個正數很大或很小時，閱讀或書寫都不容易，有時甚至會多寫或少寫一個 0，因此我們常把這一類的數，寫成科學記號來表示。
2. 科學記號的定義：將一數簡記成 $a \times 10^b$ 的形式，其中 $1 \leq a < 10, b$ 為整數。

3.科學記號的乘開

『將一數化為科學記號的方法我們學會了，那一個科學記號將它乘開來是什麼數呢？』

範例 5 將 2.43×10^4 及 3.2×10^{-3} 乘開

$$\begin{aligned} 2.43 \times 10^4 &= 2.43 \times 10000 \\ &= 24300 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3.2 \times 10^{-3} &= 3.2 \times 0.001 \\ &= 0.0032 \end{aligned}$$

重點提示：將科學記號中 10 的次方展開再相乘

練習 5：將下列科學記號乘開

(1) $4.3 \times 10^3 = (\quad)$

(2) $7.42 \times 10^4 = (\quad)$

(3) $5.5 \times 10^{-2} = (\quad)$

(4) $6.21 \times 10^{-3} = (\quad)$

4.科學記號的位數

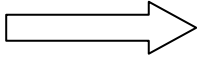

『科學記號可以很快觀察出其代表的數值是幾位數，或者是小數點後幾位的數。』

範例 6 試問 3.6×10^6 是幾位數？

若將 3.6×10^6 直接乘開，為 3600000，是一個 7 位數

另一種快速判斷法，3.6 乘以 10^6 這個非負指數的數，代表乘開的值會比 3.6 大，使小數點往右移 6 位

因此

$3.600000.$  3600000 為七位數

 往右移 6 位

練習 6：仿照範例 10 的方法，不要把科學記號乘開，判斷下列各數是幾位數？

- (1) 5.4×10^4 是()位數
- (2) 3.3×10^5 是()位數

範例 7 試問 2.3×10^{-5} 小數點後第 5 位數是多少？

若將 2.3×10^{-5} 直接乘開，為 0.000023，小數點後第 5 位數為 2

仿照範例 10，2.3 乘以 10^{-5} 這個負指數的數，代表其值會比 2.3 小，使小數點往左移 5 位

因此

$$\begin{array}{ccc}
 0.00002.3 & \longrightarrow & 0.000023 \\
 \underbrace{\quad\quad\quad\quad\quad}_{\text{往左移 5 位}} & & \text{小數後 5 位數為 2}
 \end{array}$$

練習 7：仿照範例 11 的方法，不要把科學記號乘開，判斷下列各數小數點後第 5 位數是多少？

- (1) 3.46×10^{-4} 小數點後第 5 位數是()
- (2) 4.578×10^{-3} 小數點後第 5 位數是()

觀念一點通

- 科學記號 $a \times 10^b$, $1 \leq a < 10$, b 為整數，若
 - $b > 0$ ，將 a 的小數點右移 $|b|$ 格
 - $b < 0$ ，將 a 的小數點左移 $|b|$ 格

5.科學記號比大小


『科學記號在實際應用上，可以用來比較大小，例如比較兩隻跳蚤的身長，因為跳蚤實在太小，所以我們會使用科學記號去表示它的身長，這時候科學記號就需要來比大小了！』

範例 8 試比較 4.35×10^6 與 7.53×10^4 兩數的大小

我們已經學會了如何判斷一個科學記號的位數


利用位數我們可以判斷兩個科學記號的大小

$$4.350000. \quad \longrightarrow \quad 4350000$$



往右移 6 位

$$7.5300. \quad \longrightarrow \quad 75300$$



往右移 4 位

因此顯而易見 $4.35 \times 10^6 > 7.53 \times 10^4$

練習 8：判斷下列各題的兩數的大小關係(□填入“>”“<”或“=”)


(1) 5.32×10^5 □ 8.44×10^3

(2) 8.21×10^3 □ 8.34×10^5

範例 9 試比較 2.65×10^{-3} 與 4.11×10^{-6} 兩數的大小


同範例 12 的方法，一樣利用判斷位數的方法，可以很快看出兩數的大小

$$0.002.65 \quad \longrightarrow \quad 0.00265$$



往左移 3 位

$$0.000004.11 \quad \longrightarrow \quad 0.000023$$



往左移 6 位

因此 $2.65 \times 10^{-3} > 4.11 \times 10^{-6}$

練習 9：判斷下列各題的兩數的大小關係(□填入“>”“<”或“=”)。

(1) 2.44×10^{-5} □ 1.32×10^{-3}

(2) 5.53×10^{-2} □ 7.45×10^{-3}

觀念一點通

1. 判斷科學記號的大小，依其位數可看出大小關係

牛刀小試

1. 簡記下列各題

(1) $100000000 = 10^{(\quad)}$

(2) $100000 = 10^{(\quad)}$

(3) $0.0001 = 10^{(\quad)}$

(4) $0.0000001 = 10^{(\quad)}$

2. 將下列各數表示成科學記號

(1) 56000

(2) 640000

(3) 0.0031

(4) 0.024

(5) 463600

(6) 1234000

3. 將下列科學記號乘開

(1) $7.3 \times 10^2 = (\quad)$

(2) $1.6 \times 10^3 = (\quad)$

(3) $5.5 \times 10^{-2} = (\quad)$

(4) $4.2 \times 10^{-3} = (\quad)$

4. 不要把科學記號乘開，判斷下列各數是幾位數？
- (1) 3.3×10^5 是()位數
 - (2) 1.4×10^9 是()位數
 - (3) 5.7×10^4 是()位數
5. 不要把科學記號乘開，判斷下列各數小數點後第 3 位數是多少？
- (1) 5.86×10^{-2} 小數點後第 3 位數是()
 - (2) 9.46×10^{-1} 小數點後第 3 位數是()
 - (3) 2.96×10^{-4} 小數點後第 3 位數是()
6. 判斷下列各題的兩數的大小關係(□填入“>”“<”或“=”)
- (1) 5.53×10^{-2} □ 7.45×10^{-3}
 - (2) 6.32×10^{-7} □ 4.41×10^{-5}
 - (3) 1.47×10^{-4} □ 3.29×10^{-6}