

## 單元三 指數與科學記號

### 主題一 指數

#### 一、何謂指數

##### 1.乘方的意義

『”指數”這個名詞聽起來很新潮，感覺像一個新的數，到底指數是用來做什麼用的呢？讓我們來看個小漫畫！』

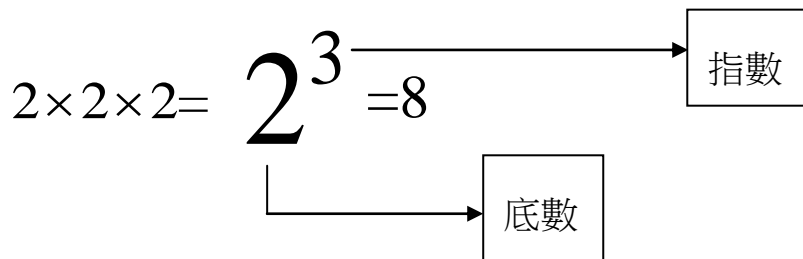


##### 2.乘方的簡記

『何謂指數？指數的用途又是什麼？現在就讓我們來認識指數這個新朋友吧！』

**觀念一點通**

1. ”指數”用來幫助我們簡化同”底數”相乘的計算，記在數的”右上角”。
2. 如下例，3個2相乘，讀作”2的3次方”，記為” $2^3$ ”，而 $2^3 = 2 \times 2 \times 2$ ，其值為8。
3.  $2^3$ 表示”2這個數自己乘自己乘了3次”。



**練習 1：**將下列各題次方寫出來並計算出值：

(1)  $5 \times 5 \times 5 = 5^{( \quad )} = ( \quad )$

唸作：( )的( )次方

(2)  $7 \times 7 = 7^{( \quad )} = ( \quad )$

唸作：( )的( )次方

(3)  $4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^{( \quad )} = ( \quad )$

唸作：( )的( )次方

**練習 2：**計算出下列各題：

(1)  $2^5 = ( \quad )$

(2)  $6^3=(\quad)$

(3)  $3^4=(\quad)$

**動動腦** 如何計算  $(\frac{2}{3})^4$

『月黑風高殺人夜，單純的整數已不是我們的對手』

『現在，挑戰者出現了，分數與小數。』

在動動腦中，我們知道：

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2}{3 \times 3 \times 3 \times 3} = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}$$

4 個  $\frac{2}{3}$  相乘

分數相乘，分子乘  
分子、分母乘分母

**重點提示：**

$(\frac{2}{3})^4$  代表  $\frac{2}{3}$  自己乘自己 4 次，再利用分數乘法性質，得知結果。

**練習 3：**計算下列各題：

(1)  $(\frac{3}{4})^3=(\quad)$

(2)  $(\frac{2}{5})^2=(\quad)$

**觀念一點通：**

1. 自己乘自己，不管乘了多少個，都可以用指數很簡單的表示出來
2. 分數的次方，可以使用分數乘法的性質來計算

## 二、負數與指數

### 1. 負數的次方計算

『上面我們學會了指數如何計算，但是回想之前我們剛學過的”負數”，如果是一個負數的次方，那要如何計算呢？讓我們繼續看下去！』

$$(-3)^5 = \underbrace{(-3) \times (-3)}_{\text{負負得正}} \times \underbrace{(-3) \times (-3)}_{\text{負負得正}} \times (-3) = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times (-3) = -243$$

↓

**孤獨的負數**

$$(-3)^4 = \underbrace{(-3) \times (-3)}_{\text{負負得正}} \times \underbrace{(-3) \times (-3)}_{\text{負負得正}} = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$$

#### 觀念一點通

1. 在計算負數的次方時，須完成一連串的負負得正
2. 當做完一連串的負負得正時，若存在”孤獨的負數”，則算出之值為負。也就是說：偶數個負數相乘，其值為正，奇數個負數相乘，其值為負。

練習 4：計算出下列各式之值。

- |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|
| (1) $(-3)^3 = ( \quad )$ | (4) $(-2)^2 = ( \quad )$ |
| (2) $(-5)^3 = ( \quad )$ | (5) $(-4)^2 = ( \quad )$ |
| (3) $(-7)^3 = ( \quad )$ | (6) $(-6)^2 = ( \quad )$ |

練習 5：判斷下列各小題為正數或負數：

- (1)  $(-4)^{101}$  為( )數                      (3)  $(-3)^{10100}$  為( )數  
 (2)  $(-7)^{98}$  為( )數                      (4)  $(-2)^{197}$  為( )數

動動腦：

想想看  $(-2)^4$  與  $-2^4$  『算出來的結果是否相等？』

$$(-2)^4 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$$

$$-2^4 = -(2^4) = -(2 \times 2 \times 2 \times 2) = -16$$

└─→ 指數先運算再加負號

『由上面運算結果， $(-2)^4$  與  $-2^4$  算出來的值不一樣，會差一個負號，想想看如果奇數次方，算出來會是怎樣的結果？』

練習 6：計算下列各式之值

- (1)  $(-3)^2 = ( \quad )$   
 (2)  $-3^2 = ( \quad )$

#### 觀念一點通

- 負數的次方需要做一連串的負負得正，觀察是否擁有**孤獨的負數**，決定值為正為負。
- 我們發現：一個負數的**奇次方**，必具有**孤獨的負數**，為**負數**  
**偶次方**，不具有落單的負數，為**正數**

### 三、指數律

#### 1. 指數律

『指數在計算上，有一些規則可循，於是產生了指數四大金剛，也就是所謂的指數律。指數律能夠幫助我們解決任何指數計算問題！』

#### 觀念一點通

1. 同底數相乘，指數相加：

$$3^4 \times 3^3 = 3^{4+3} = 3^7$$

2. 同底數相除，指數相減：

$$3^5 \div 3^2 = 3^{5-2} = 3^3$$

3. 同指數相乘，底數相乘：

$$3^5 \times 2^5 = (3 \times 2)^5 = 6^5$$

4. 同指數相除，底數相除：

$$8^4 \div 2^4 = (8 \div 2)^4 = 4^4$$

#### 練習 7：填填看

(1)  $2^4 \times 2^5 = 2^{( \quad )}$

(2)  $6^7 \div 6^3 = 6^{( \quad )}$

(3)  $3^5 \times 3^3 = 3^{( \quad )}$

(4)  $9^7 \div 9^6 = 9^{( \quad )}$

(5)  $4^3 \times 2^3 = ( \quad )^3$

(6)  $8^7 \div 4^7 = ( \quad )^7$

(7)  $2^6 \times 5^6 = ( \quad )^6$

(8)  $100^8 \div 10^8 = ( \quad )^8$

**動動腦**

想想看  $(3^2)^4$  與  $(3^4)^2$  它們的結果是否相等？

$$(3^2)^4 = 3^2 \times 3^2 \times 3^2 \times 3^2 = 3^{2+2+2+2} = 3^8$$

指數律” 同底相乘，指數相加”

$$(3^4)^2 = 3^4 \times 3^4 = 3^{4+4} = 3^8$$

指數律” 同底相乘，指數相加”

由上面的結果我們知道  $(3^2)^4 = (3^4)^2$ ，想想看，是否換個底數以後也是如此呢？

**練習 8：**請先寫出各小題的指數型式，並判斷各小題的兩個答案是否相同，然後在□中打✓

$$(1) \begin{cases} (3^4)^2 \\ (4^2)^3 = 4^{( \quad )} \end{cases}$$

結果： 相同 不相同

$$(2) \begin{cases} (4^5)^2 \\ (5^2)^4 = 5^{( \quad )} \end{cases}$$

結果： 相同 不相同

由前面的練習可知道

$$(3^2)^4 = 3^{2+2+2+2}$$

$$(3^4)^2 = 3^{4+4}$$

因此  $(3^2)^4 = 3^{2 \times 4} = 3^8$

$$(3^4)^2 = 3^{4 \times 2} = 3^8$$

這兩個數運算出來的結果會一樣。

**練習 9：**填填看

(1)  $(2^2)^3 = 2^{( \quad )}$

(2)  $(4^3)^2 = 4^{( \quad )}$

**動動腦** 利用指數律計算  $3^3 \div 3^3$ ，並觀察其結果  
由指數律”同底相除，指數相減”得知

$$3^3 \div 3^3 = 3^{3-3} = 3^0$$

然而  $3^3 \div 3^3 = 27 \div 27 = 1$

於是得知  $3^0 = 1$

其實不為零的數的 0 次方皆為 1，

即  $a^0 = 1$ ， $a$  為不為零的數

**觀念一點通**

1.  $(3^4)^2$ ，這類指數乘指數的計算，即把”指數相乘”，為  $3^{4 \times 2}$ 。
2. 由乘法交換律知道， $3^{4 \times 2} = 3^{2 \times 4}$ ，於是  $(3^4)^2 = (3^2)^4$ 。
3.  $(3^4)^2 = 3^{4 \times 2}$  這也是指數律。
4. 指數的指數：可利用”指數相乘”的方法運算
5. 不為零的數的 0 次方皆為 1，即  $a^0 = 1$ ， $a$  為不為零的數



## 2.指數律計算

『學會了指數律四大金剛，接下來就是利用這些指數律來幫助我們解決指數運算了！』

### 範例 1

$$\begin{aligned}2^3 \times 2^2 \times 2^4 &= (2^3 \times 2^2) \times 2^4 \\ &= 2^{3+2} \times 2^4 \\ &= 2^5 \times 2^4 \\ &= 2^{5+4} = 2^9\end{aligned}$$

### 範例 2

$$\begin{aligned}3^4 \times 3^3 \div 3^2 &= (3^4 \times 3^3) \div 3^2 \\ &= 3^{4+3} \div 3^2 \\ &= 3^7 \div 3^2 \\ &= 3^{7-2} = 3^5\end{aligned}$$

### 範例 3

$$\begin{aligned}4^6 \div 4^4 \times 4^2 &= (4^6 \div 4^4) \times 4^2 \\ &= 4^{6-4} \times 4^2 \\ &= 4^2 \times 4^2 \\ &= 4^{2+2} = 4^4\end{aligned}$$

### 範例 4

$$\begin{aligned}5^6 \div 5^3 \div 5^2 &= (5^6 \div 5^3) \div 5^2 \\ &= 5^{6-3} \div 5^2 \\ &= 5^3 \div 5^2 \\ &= 5^{3-2} = 5^1\end{aligned}$$

**重點提示：**以上範例的技巧，先計算前兩個數，算出結果以後再跟後面的數做運算，每次計算的時候都會用到指數律。

**練習 10：**將以下各題空格填入正確的數。

- (1)  $3^3 \times 3^2 \times 3^4 = 3^{( )}$
- (2)  $2^8 \div 2^3 \times 2^2 = 2^{( )}$
- (3)  $5^8 \div 5^3 \div 5^2 = 5^{( )}$
- (4)  $6^3 \times 6^4 \div 6^2 = 6^{( )}$

牛刀小試 1 在下列空格中填入正確的答案

(1)  $2^3 = ( \quad )$

(2)  $(-3)^3 = ( \quad )$

(3)  $(-5)^{103}$  為(  )數 (填入“正”或“負”)

(4)  $-4^2 = ( \quad )$

(5)  $3^2 \times 3^3 = 3^{( \quad )}$

(6)  $9^8 \div 9^5 = 9^{( \quad )}$

(7)  $2^3 \times 5^3 = ( \quad )^3$

(8)  $(4^3)^2 = 4^{( \quad )}$

(9)  $2^6 \div 2^3 \times 2^2 = ( \quad )$

(10)  $6^3 \times 6^5 \div 6^2 = ( \quad )$